Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский автотранспортный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебному предмету

ЕН.01 Элементы высшей математики

(код и наименование УД или МДК)

по специальности:

09.02.07 Информационные системы и программирование

(код и наименование специальности)

2020

Одобрено на заседании
предметно-цикловой комиссии
информационно-математических и
экономических дисциплин
Протокол № 1 от «25» августа 2020 г.
Председатель комиссии:
_______________/И.Г.Наговицын

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора
_______________М.Г. ЦЕЛИЩЕВА
«25» августа 2020г.

Организация-разработчик: ГБПОУ КАТК

Составитель: И. Б. Воронцова

СОДЕРЖАНИЕ

1 Пояснительная записка

Данные методические рекомендации составлены в соответствии с содержанием рабочей программы ЕН.01 Элементы Высшей Математики (ЭВМ) специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование

ЕН.01 ЭВМ изучается в течение 2 семестров. Общий объем времени, отведенный на практические занятия по УД/МДК, составляет в соответствии с учебным планом и рабочей программой – 63 часа.

Практические работы проводятся после изучения соответствующих разделов и тем ЕН.01 ЭВМ . Выполнение обучающимися практических работ позволяет им понять, где и когда изучаемые теоретические положения и практические умения могут быть использованы в будущей практической деятельности.

В результате выполнения практических работ, предусмотренных программой по УД/МДК ЕН.01 ЭВМ, обучающийся должен:

Обучающийся умеет:

У 1 - 7	Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений
У 8-10	Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости
У 11-12	Применять методы дифференциального и интегрального исчисления
У 13-17	Решать дифференциальные уравнения
У 18-19	Пользоваться понятиями теории комплексных чисел

Обучающийся знает:

З 1 - 10	Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии
З 11 - 17	Основы дифференциального и интегрального исчисления
З 18 - 19	Основы теории комплексных чисел

Вышеперечисленные умения, знания и практический опыт направлены на формирование следующих профессиональных и общих компетенций обучающихся**:**

ОК 1	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес
ОК 2	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество
ОК 3	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность
ОК 4	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития
ОК 5	Владеть информационной культурой, анализировать и оценивать информацию с использованием информационно-коммуникационных технологий

ОК 6	Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями
ОК 7	Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий
ОК 8	Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации
ОК 9	Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности
ПК 3,5,8,9,11,12	Демонстрирует способность организовывать деловое общение на основании данных профессиональных компетенций
ПК 1,2,7,11	Демонстрирует готовность и способность к эффективному общению и сотрудничеству на основании данных профессиональных компетенций
ПК 3,4,6,10,13	демонстрирует умение использовать нормативную документацию на основании данных профессиональных компетенций

2 Перечень практических работ УД/МДК ЕН.01 ЭВМ

Рабочая программа учебной дисциплины предусматривает 63 часа практических

Перечень практических работ

№ п/п	Название работы	Объем часов
1.	Действия над комплексными числами в алгебраической и геометрической формах	3
2.	Действия над комплексными числами в различных формах	2
3.	Вычисление определителей второго, третьего и четвертого порядков	3
4.	Решение систем линейных уравнений третьего и четвертого порядка по формулам Крамера	3
5.	Решение систем линейных уравнений четвертого порядка методом Гаусса	3
6.	Составление уравнений прямых на плоскости	2
7.	Составление уравнений кривых второго порядка	2
8.	Вычисление пределов функции	2
9.	Дифференцирование функций	2
10.	Составление уравнений касательной и нормали, решение задач на механический смысл производной функции	2
11.	Исследование и построение графиков функции	2
12.	Приложение дифференциала функции к приближенным вычислениям	3
13.	Непосредственное интегрирование функций	2
14.	Интегрирование функций методом подстановки	2
15.	Интегрирование функций по частям	2
16.	Вычисление определенных интегралов	2
17.	Вычисление площадей плоских фигур и объемов тел	2
18.	Решение физических и технических задач с помощью определенного интеграла	2
19.	Решение задач с помощью двойных интегралов	3
20.	Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными	3
21.	Решение дифференциальных уравнений	3
22.	Решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами	3
23.	Исследование рядов на сходимость	3
24.	Разложение функций в ряды Тейлора или Маклорена.	3
25.	Вычисление абсолютной и относительной погрешностей приближенных чисел	2
26.	Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии	2
ИТОГО		63

Требования к оформлению практических работ

Студент должен выполнить практическую работу в соответствии с полученным заданием. Каждый студент после выполнения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.

Отчет о проделанной работе следует выполнять на отдельных листах в клетку формата А4, которые хранятся в отдельных папках. Содержание отчета указано в описании практической работы. Таблицы и рисунки следует выполнять с помощью чертежных инструментов карандашом с соблюдением ЕСКД.

Если студент не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.

Оценку по практической работе студент получает, с учетом срока выполнения работы, если:

- работа выполнена правильно и в полном объеме;
- сделан анализ проделанной работы и вывод по результатам работы;
- студент может пояснить выполнение любого этапа работы;
- отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнению работы.

Зачет по практическим работам студент получает при условии выполнения всех предусмотренных программой работ, после сдачи отчетов по работам при получении удовлетворительных отметок.

Практическая работа 1

Тема: **Действия над комплексными числами в алгебраической и геометрической формах**

Цель работы: познакомить студентов с комплексными числами, научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и геометрической формах.

Краткие теоретические сведения

Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b – действительные числа, а i – мнимая единица.

Число а называется *действительной частью* комплексного числа, а число bi – мнимой частью. Знак «+» здесь надо понимать не как знак сложения, а как некий соединительный знак.

Запись комплексного числа в виде $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ называются *равными* только тогда , когда $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$, т.е. когда равны их действительные части и коэффициенты при мнимой части.

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не определяются.

Комплексное число $z = 0+0i$ называется нулём и обозначается 0; комплексное число

$z= a + 0i$ отождествляется с действительным числом a, т.е. $a + 0i = a$; комплексное число $z = 0 + bi$ называется *чисто мнимым* и обозначается bi, т.е. $0 + bi = bi$.

Число 0 является единственным числом, которое одновременно действительное и чисто мнимое.

Комплексные числа вида $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряжёнными*.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$. Сложение комплексных чисел обладает свойствами коммутативности и ассоциативности.

Например, $z_1 = 5 + i \cdot 4; \quad z_2 = -7 - i \cdot 9 \quad z = z_1 + z_2 = -2 - i \cdot 5.$

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число $z_1z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.

Например, $z_1 = 3 + i \cdot 5; \; z_2 = 4 - i \cdot 7; \; z_1 \cdot z_2 = 47 - i$

Произведение двух сопряжённых комплексных чисел равно сумме квадратов действительной части и коэффициента его мнимой части, т.е. $(a + i \cdot b)(a - i \cdot b) = a^2 + b^2$. Произведение комплексных чисел обладает свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности

Вычитание комплексных чисел вводится как операция, обратная сложению; Например, $z_1 = 7 - i \cdot 2; \; z_2 = 5 + i \cdot 8; \quad z_1 - z_2 = 2 - i \cdot 10.$

Деление комплексных чисел вводится как операция, обратная умножению. При делении на комплексное число достаточно умножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряжённое знаменателю, т.е. на $a_1 - b_1i$.

Например, $\dfrac{10 + i \cdot 15}{1 + i \cdot 2} = \dfrac{(10 + i15)(1 - i2)}{(1 + i2)(1 - i2)} = \dfrac{10 + i15 - i20 + 30}{1 + 4} = \dfrac{40 - i5}{5} = 8 - i$ Ответ: 8 – i

Возведение комплексного числа в степень производится по формулам возведения двучлена в степень, но при этом надо учитывать, что:

$$i^1 = i, \quad i^{4n+1} = i^1 = i$$
$$i^2 = -1, \quad i^{4n+2} = i^2 = -1$$
$$i^3 = -i, \quad i^{4n+3} = i^3 = -i$$
$$i^4 = 1, \quad i^{4n} = 1$$

Например, $i^{24} = 1$, $i^{59} = i^{4*14+3} = i^3 = -i$, $i^{42} = i^{4*10+2} = i^2 = -1$

Геометрическая интерпретация комплексного числа.

Комплексные числа, как и действительные, допускают простую интерпретацию, если вместо координатной прямой использовать координатную плоскость. Комплексное число $z = a + bi$ изображается на координатной плоскости точкой М (a, b) или вектором ОМ, начало которого совпадает с началом координат, а конец - с точкой М (рис.1)

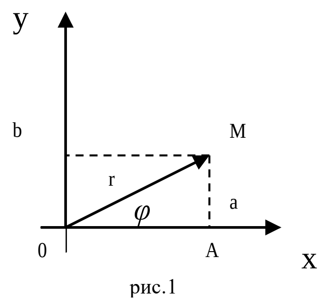


рис.1

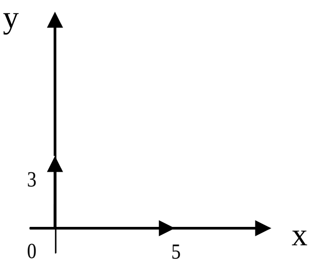


рис.2

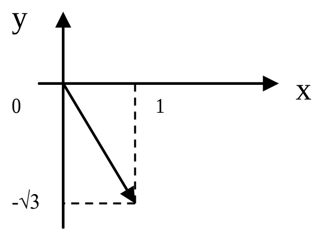
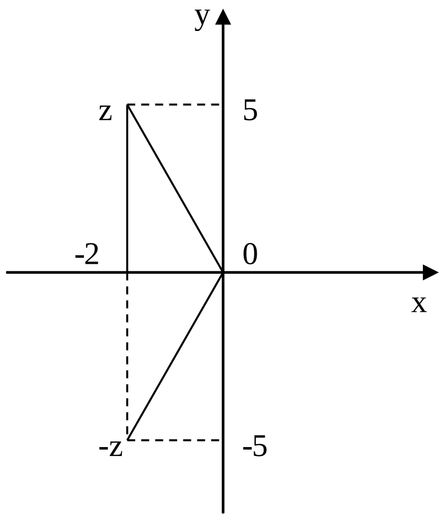


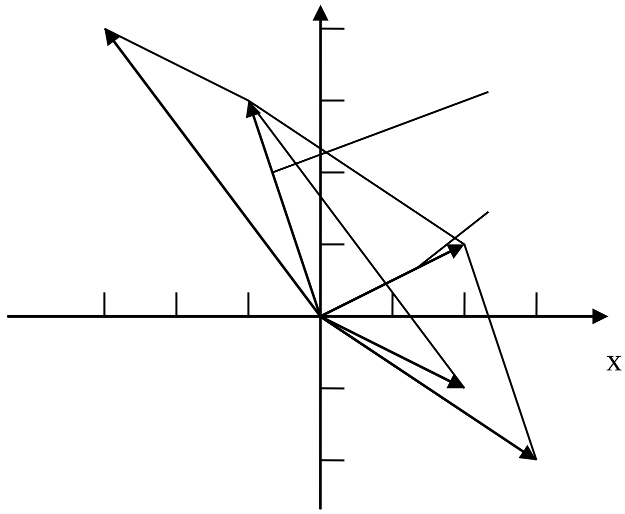
рис.3

Сама координатная плоскость называется при этом *комплексной плоскостью*, ось абсцисс - *действительной осью*, а ось ординат – *мнимой осью*.

Пример. Дано: $z_1 = 3 - i \cdot 2; \; z_2 = -3 + i \cdot 4; \; z_3 = 2 - i$. Найти $z = z_1 + z_2 + z_3$ (алгебраически и геометрически)

Решение. $z = (3 - i \cdot 2) + (-3 + i \cdot 4) + (2 - i) = 2 + i$ (рис.)





Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант1

1. Выполнить действия геометрически

   (4+2i)+ (1+5i)- (-2+2i)=

2. Вычислить:

   $$\frac{(8+2i)}{(5-3i)}$$

3. Вычислить: $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} =$

4. Выполнить действия:

   $$\frac{1+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$$

5. Решить уравнение:

   $$x^2 - 10x + 250 = 0$$

Вариант2

1. Выполнить действия геометрически

   (2-3i)+ (5+6i)- (3+4i)=

2. Вычислить:

   $$\frac{(3 - 2i)}{(1 + 3i)}$$

3. Вычислить: $i + i^{11} + i^{21} + i^{31} =$

4. Выполнить действия:

   $$\frac{5+2i}{2-5i}-\frac{3-4i}{4+3i}$$

5. Решить уравнение:

   $$x^2 - 4x + 85 = 0$$

Вариант3

1. Выполнить действия геометрически

   (3-5i)+ (-1-2i)- (6+3i)=

2. Вычислить:

$$\frac{(2 + i)}{(3 - 2i)}$$

3. Вычислить: $i^7 + i^{17} + i^{47} + i^{65} =$

4. Выполнить действия:

$$\frac{3+2i}{2-3i}-\frac{5+6i}{6-5i}$$

5. Решить уравнение:

$$x^2-8x+41=0$$

Вариант4

1. Выполнить действия геометрически

   (2-3i)+ (5+6i)- (3+4i)=

2. Вычислить:

$$\frac{(1 - 2i)}{(3 - 2i)}$$

3. Вычислить: $i^{19} + i^{5} + i^{21} + i^{27} =$

4. Выполнить действия:

$$\frac{2+3i}{(4+i)\cdot(2-2i)}=$$

5. Решить уравнение:

$$x^2-6x+13=0$$

Вариант5

1. Выполнить действия геометрически

   (1 +5i)- (-2+2i)- (4+2i)=

2. Вычислить:

$$\frac{(2 + i)}{(3 - 2i)}$$

3. Вычислить: $i^7 + i^{17} + i^{47} + i^{65} =$

4. Выполнить действия:

$$\frac{3+2i}{2-3i}-\frac{5+6i}{6-5i}=$$

5. Решить уравнение:

$$x^2-8x+41=0$$

Вариант6

1. Выполнить действия геометрически

(3 +5i)+ (-1-2i)- (6+3i)=

2. Вычислить:

$$\frac{(2-i)}{(1+i)}$$

3. Вычислить: $i^2 + i^{22} + i^4 + i^{44} =$

4. Выполнить действия:

$$\frac{(1-i)^2}{(1+i)^3}=$$

5. Решить уравнение:

$$x^2+12x+85=0$$

Контрольные вопросы:

1. Запишите алгебраическую форму комплексного числа.
2. Чему равен i^2?
3. Сформулируйте правило сложения (вычитания) комплексных чисел.
4. Сформулируйте правило умножения комплексных чисел.
5. Сформулируйте правило деления комплексных чисел.
6. Сформулируйте правило возведения в степень комплексных чисел.
7. Запишите формулы степени мнимой единицы.
8. Какие числа называются сопряженными?
9. Сформулируйте свойство сопряженных чисел.
10. Геометрическая форма комплексного числа.

Практическая работа 2

Тема: **Действия над комплексными числами в различных формах**

Цель работы: ввести понятие комплексного числа и действий над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах, научить выполнять действия с ними.

Краткие теоретические сведения

Для того, чтобы перейти от алгебраической формы записи комплексного числа $z = a + bi$ к тригонометрической, достаточно найти его модуль и один из аргументов. Аргумент комплексного числа $z = a + bi$ можно находить из системы $\cos\varphi = a/r;$ $\sin\varphi = b/r$. или по формуле $\varphi = arctg\left|\frac{b}{a}\right|$ с учетом четверти, в которой находится данное комплексное число.

Для того, чтобы перейти от тригонометрической формы записи комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ к алгебраической, достаточно найти действительные числа a и b по формулам $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме. Если $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то

$z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$,

$z_1 / z_2 = r_1 / r_2(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$,

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\,(\cos((\varphi + 2\pi k) / n) + i\sin((\varphi + 2\pi k) / n)$,

где $\sqrt[n]{r}$ – арифметический корень, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Показательная форма комплексного числа.

Рассматривая функцию $y = e^x$ для комплексного переменного, Эйлер установил замечательное соотношение $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, которое называется *формулой Эйлера*. Из этой формулы следует, что каждое комплексное число $z \neq 0$ можно записать в форме $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$, которая называется *показательной формой* записи.

Действия над комплексными числами, заданными в показательной форме.

Над комплексными числами, заданными в показательной форме, удобно производить умножение и деление, возведение в натуральную степень и извлечение корня:

$$r_1e^{i\varphi_1}r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$
$$r_1e^{i\varphi_1} / r_2e^{i\varphi_2} = (r_1 / r_2)\, e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$
$$(re^{i\varphi})^n = r^ne^{in\varphi};$$
$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi + 2\pi k / n)},\ k = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1).$$

Пример

Найти $\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{15}$

Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме:

$$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2, \arg z = \varphi = tg\,\frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} - \pi = -\frac{2}{3}\pi, -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

По формуле *Муавра* имеем:

$$\left(-1-i\sqrt{\ }\right)^{15}=\left[2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right]^{15}=2^{15}*\left(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi)\right)=2^{15}(1+0i)=$$

$$=2^{15}=32768.$$

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=1-i;z_2=-3+2i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{3+4i}{i}+\frac{4-i}{3+2i}$ б) $(-1+i)^5;$ в) $\sqrt[3]{-i};$

Вариант 2

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=2-i;z_2=3+4i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{1+3i}{-2+i}*(-2i)+1;$ б) $(2i-1)^4;$ в) $\sqrt[4]{-16};$

Вариант 3

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=1-3i;z_2=5+i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{2+i}{2-i}(3+4i)+\frac{4-i}{3+2i};$ б) $(1-2i)^3;$ в) $\sqrt[5]{1+i};$

Вариант 4

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=4-3i;z_2=3+2i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{2+i}{3+4i}-3(2-i)*i(1-i);$ б) $(2i+1)^4;$ в) $\sqrt[3]{i};$

Вариант 5

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=-5+i;z_2=-5-i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{5}{1-2i}+\frac{2i-3}{1+i}-\frac{2+3i}{i};$ б) $(1-i)^7;$ в) $\sqrt[4]{8-8\sqrt{8i}};$

Вариант 6

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=1-i;z_2=-3+2i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{2+i}{3+4i}-3(2-i)*i(1-i);$ б) $(2i+1)^4;$ в) $\sqrt[3]{i};$

Вариант 7

№1. Вычислить $z_1+z_2;z_1-z_2;z_1*z_2;\frac{z_1}{z_2};$ результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$z_1=2-i;z_2=3+4i;$

№2. Вычислить

а) $\frac{5}{1-2i}+\frac{2i-3}{1+i}-\frac{2+3i}{i};$ б) $(1-i)^7;$ в) $\sqrt[4]{8-8\sqrt{8i}};$

Вариант 8

№1. Вычислить $z_1 + z_2; z_1 - z_2; z_1 * z_2; \frac{z_1}{z_2}$; результат изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме.

$$z_1 = 1 - 3i; z_2 = 5 + i;$$

№2. Вычислить

а) $\frac{3+4i}{i} + \frac{4-i}{3+2i}$ б) $(-1+i)^5$; в) $\sqrt[3]{-i}$;

Контрольные вопросы:

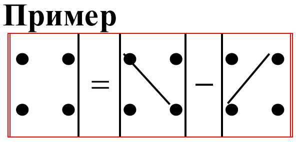
1. Запишите тригонометрическую форму комплексного числа.
2. Запишите показательную форму комплексного числа.
3. Сформулируйте правило перевода комплексных чисел из алгебраической формы в тригонометрическую и показательную формы.
4. Сформулируйте правило умножения комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
5. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
6. Сформулируйте правило возведения в степень комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.
7. Сформулируйте правило извлечения корня из комплексных чисел в тригонометрической и показательной формах.

Практическая работа №3

Тема: Вычисление определителей второго, третьего и четвёртого порядков

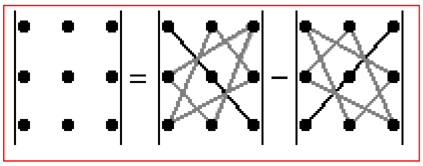
Цель работы: научиться вычислять определители второго, третьего и четвертого порядков

Пример



№1 Вычислить определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$



№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = (3\cdot5\cdot2+2\cdot2\cdot3+3\cdot4\cdot1)-(3\cdot5\cdot1+4\cdot3\cdot3+2\cdot2\cdot2)=$$

$$=(30+12+12)-(15+36+8)=54-59=-4$$

№3 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = (-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\cdot9+3\cdot31+0-2\cdot6=63$$

Вариант1

№1 Вычислите определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант2

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & x+1 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = -6$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант 3

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант4

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \sin 45^\circ & tg\,45^\circ \\ ctg\,45^\circ & \sin 45^\circ \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант 5

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант6

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_{1/3} 27 \\ \log_5 1 & \lg 1000 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Вариант7

№1 Вычислите определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x & xy \\ 1 & y \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант8

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант9

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} x+3 & x-1 \\ 7-x & x-1 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

Вариант10

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \sin 45^\circ & tg\,45^\circ \\ ctg\,45^\circ & \sin 45^\circ \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & x+1 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = -6$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b & 0 \\ 3 & c & 4 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант11

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \log_2 32 & \log_3 27 \\ \log_4 16 & \log_5 125 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 \\ x-1 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант12

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \log_2 8 & \log_{1/3} 27 \\ \log_5 1 & \lg 1000 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 8 \\ 25 & 49 & 64 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2x+1 & 3 \\ x+5 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Вариант13

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} \sin 45^\circ & tg\, 45^\circ \\ ctg\, 45^\circ & \sin 45^\circ \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & y & z \\ x & 0 & z \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 7 & x-3 \\ 5 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

Вариант14

№1 Вычислить определители второго порядка

а) $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} x & x-1 \\ x^2+x+1 & x^2 \end{vmatrix}$

№2 Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

№3 Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-1 \\ 2x & 1 & 0 \\ 4 & x+2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

№4 Вычислить определитель четвёртого порядка разложением по строке или столбцу

$$\begin{vmatrix} 5 & a & 2 & -1 \\ 4 & b & 4 & -3 \\ 2 & c & 3 & -2 \\ 4 & d & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Контрольные вопросы

1. Определение матрицы.
2. Перечислите виды матриц.
3. транспонирование матриц.
4. Линейные операции над матрицами, их свойства
5. Умножение матриц.
6. Определитель матрицы второго порядка, правило его вычисления.
7. Определитель матрицы третьего порядка, правило его вычисления.
8. Разложение определителя четвертого порядка по элементам строки.

Практическая работа № 4

Тема: Решение систем линейных уравнений третьего и четвертого порядка по формулам Крамера

Цель работы: научиться решать системы уравнений методом определителей

Примеры

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \Delta_i = \begin{vmatrix} b_1 \ldots a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_n \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\boxed{X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = \frac{1}{1,n}}$$

Решить систему линейных уравнений по формуле Крамера.

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \Delta X_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = 6 \qquad \Delta X_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 9$$

$$X_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2 \qquad X_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3$$

Проверка:

$\begin{cases} 2 - 1 = -1; \\ 2*2 + 3 = 7 \end{cases}$

Ответ: (2 ; 3)

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 = -6 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \qquad \Delta X_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54 \quad \Delta X_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad \Delta X_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54$$

$$X_1 = -2 \quad X_2 = 1 \quad X_3 = 2$$

Ответ: (-2 ; 1 ; 2).

Решить системы уравнений по формулам Крамера

1 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9 \\ 2x + 5y - 3z = 4 \\ 5x + 6y - 2z = 18 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -13 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$

2 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + \sqrt{5}x_2 = 0 \\ 2\sqrt{5}x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$

3 вариант

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -4 \\ 2x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 4x + 5y + 6z = 8 \\ 7x + 8y = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

4 вариант

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$

7 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y - z = -6 \\ 2x - y + 2z = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$

5 вариант

1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = -5 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

6 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 6 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = 21 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

8 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 = 13 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -12 \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$

9 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = -6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x - 7y + 2z = 9 \\ 6x - 5y + -3z = -5 \\ -3x + 4y - z = -6 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$

10 вариант

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5 = 0 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -10 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$

11 вариант

1) $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 - x_2 = -5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 7x_1 + 8x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$

12 вариант

1) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -11 \\ 3x_1 + x_2 = 11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 12 \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

13 вариант

1) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

14 вариант

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$

Практическая работа № 5

Тема: Решение систем линейных уравнений четвертого порядка методом Гаусса

Цель работы: научиться решать системы уравнений методом Гаусса

Краткие теоретические сведения

Суть метода Гаусса состоит в том, что путем равносильных алгебраических преобразований исходная матрица приводится к диагональному виду.

Пример

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 4x_1 - 2x_3 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

Перепишем условие в виде

1	4	-1	2	2
4	-2	-3	4	6
-1	1	1	3	3
4	-5	-2	-4	0

Проделаем следующие действия:

- Первую строку оставим без изменения;
- На место второй строки запишем результат вычитания из первой строки, умноженной на 4, вычтем вторую строку;
- На место третьей строки запишем результат сложения первой строки с третьей строкой;
- На место четвертой строки запишем результат вычитания из первой строки, умноженной на 4, вычтем четвертую строку.

Получим

1	4	-1	2	2
0	18	-1	4	2
0	5	0	5	5
0	21	-2	12	8

Перепишем данную таблицу, сократив третью строку на 5 и поставим ее на место второй строки

1	4	-1	2	2
0	1	0	1	1
0	18	-1	4	2
0	21	-2	12	8

Далее выполняем следующие действия:

- Первую и вторую строки оставим без изменения;
- На место третьей строки запишем результат вычитания второй строки, умноженной на 18, и третьей строки;
- На место четвертой строки запишем результат вычитания второй строки, умноженной на 21, и четвертой строки.

Получим

1	4	-1	2	2
0	1	0	1	1
0	0	1	14	16
0	0	2	9	13

Далее выполняем следующие действия:

- Первую, вторую и третью строки оставим без изменения;
- На место четвертой строки запишем результат вычитания третьей строки, умноженной на 2, и четвертой строки.

Получим

$$\begin{matrix} 1 & 4 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 19 & 19 \end{matrix}$$

Данный результат позволяет записать исходную систему уравнений в виде

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ x_3 + 14x_4 = 16 \\ 19x_4 = 19 \end{cases}$$

Отсюда видим, что из четвертого уравнения можно найти $x_4=1$. Далее, найденное значение x_4 подставляем в третье уравнение и находим, что $x_3=2$, затем известные значения x_4 и x_3 подставляем во второе уравнение и находим $x_2=0$, и последнее – x_2, x_3, x_4 подставляем в первое уравнение и находи $x_1=2$.

Ответ: (2;0;2;1)

Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

1 вариант

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -13 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 11 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 19 \end{cases}$$

2 вариант

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$$

3 вариант

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

4 вариант

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 3x_4 = -2 \\ -5x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 5x_4 = -2 \\ 8x_1 - 8x_2 + 5x_3 - 6x_4 = -5 \end{cases}$$

5 вариант

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

6 вариант

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 28 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 36 \\ 9x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 42 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

7 вариант

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 4 \\ 4x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

8 вариант

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

9 вариант

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 6 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \end{cases}$$

10 вариант

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = -6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

11 вариант

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

12 вариант

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

13 вариант

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -6 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ 5x_1 - 4x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Практическая работа №6

Тема: Составление уравнений прямых на плоскости

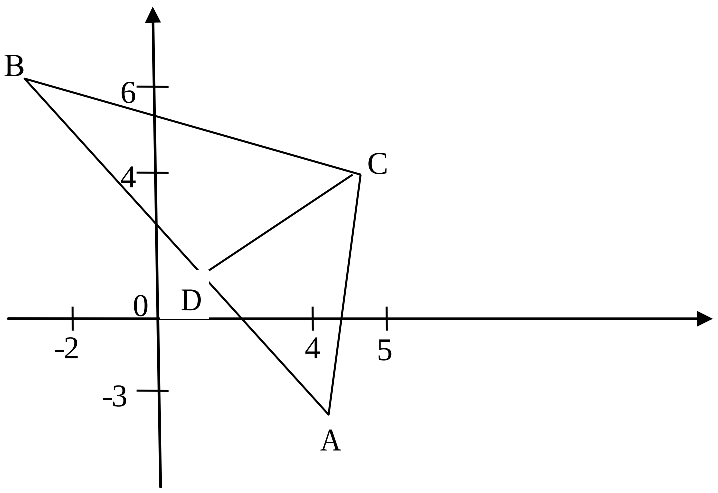
Цель работы: научиться составлять уравнения прямых по различным исходным данным

Виды прямых:

1. $Ax + Bx + C = 0$ – общее уравнение прямой.
2. $y - y_0 = k(x - x_0)$ – уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом.
3. $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ - уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
4. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{в} = 1$ - уравнение прямой в отрезках на осях
5. $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором.

Пример

Дан треугольник ABC с вершинами A(4; -3), B(-2; 6), C(5; 4). Составить уравнение высоты CD.



Высота CD проходит через точку C(5; 4), за нормальный вектор примем вектор $\overline{BA}$ = (6; 9) $\Rightarrow$ 6(x-5)-9(y-4)=0 $\Rightarrow$ 2x-3y+2=0.

1 ВАРИАНТ

Уравнения сторон треугольника имеют вид:

l_1 : 2x - 3y + 12=0; l_2 : 2x +y - 6=0; l_3 : x + 2y + 2=0

Определить: 1) вершины треугольника A, B, C;

2) уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно оси абсцисс;

3) угол C;

4) уравнение высоты (BK);

5) основание медианы (BD)

2 ВАРИАНТ

Даны две последовательные вершины параллелограмма A(-2;-2), B(2;3) и точка пересечение его диагоналей M(4;0)

Определить: 1) вершину D;
2) уравнение стороны (CD);
3) угол АСД;
4) уравнение диагонали (AC);
5) площадь параллелограмма

3 ВАРИАНТ

В треугольнике ABC известны вершины A(-4;2), B(3;3) и точка пересечения его медиан M(2;1)

Определить: 1) вершину C;
2) уравнение стороны (AC);
3) угол С;
4) уравнение высоты (BK);
5) длину стороны (AB)

4 ВАРИАНТ

Треугольник ABC задан своими вершинами A(2;3), B(6;9) и C(9;-2)

Определить: 1) точку пересечения медиан;
2) уравнение стороны (AB);
3) угол В;
4) уравнение высоты (AF);
5) площадь треугольника

5 ВАРИАНТ

Дан квадрат ABCD, у которого известны три вершины A(-3;1), B(1;4), C(0;-3)

Определить: 1) вершину D;
2) уравнение стороны (CD);
3) уравнение стороны (BD);
4) уравнение стороны (AC);
5) точку пересечения диагоналей

6 ВАРИАНТ

Вершины треугольника находятся в точках $A(3;-4\ );B(1;3\ )$ и $C(-4;-2\ )$.

Определить: 1) уравнение высоты (CD);
2) уравнение стороны (BC);
3) угол В;
4) площадь треугольника;
5) уравнение медианы (AM)

Контрольные вопросы

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором.
2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом.
3. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки.
4. Уравнение прямой в отрезках на осях.
5. Расстояние между двумя точками.
6. Расстояние от точки до прямой.
7. Условие параллельности двух прямых.
8. Условие перпендикулярности двух прямых

Практическая работа №7

Тема: Составление уравнений кривых второго порядка

Цель работы: научится составлять уравнения кривых второго порядка с различными исходными данными

Уравнения кривых второго порядка имеют вид:

1) $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ - каноническое уравнение окружности
2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение эллипса
3) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ - каноническое уравнение гиперболы
4) $y^2=2px$ - каноническое уравнение параболы

Пример 1. Составить уравнение гиперболы, вершины которой находятся в точках A_1 (5; 0) и A_2 (-5; 0), а расстояние между фокусами равно 14.

Имеем: a=5, $F_1F_2=2c=14$, т.е. c=7. По формуле $b^2=c^2-a^2$ находим $b^2=7^2-5^2=24$. Следовательно, искомое уравнение будет

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$$

Пример 2. Найти вершину, фокус, ось и директрису параболы

$$y=-2x^2+16x-29.$$

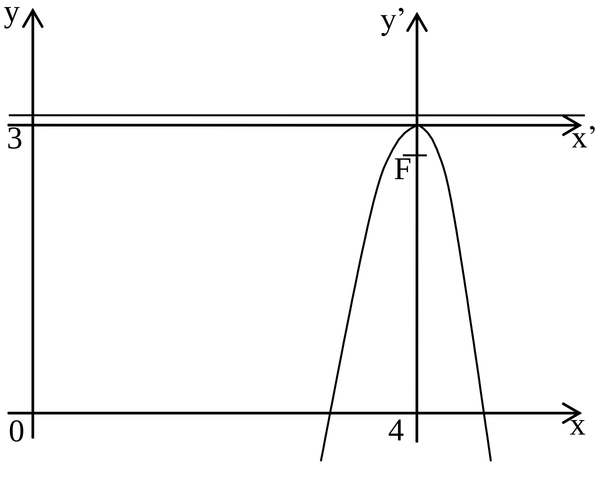
Преобразуем уравнение:

$$y=-2\left(x^2-8x+\frac{29}{2}\right)=-2\left(x^2-8x+16-16+\frac{29}{2}\right)=-2\left((x-4)^2-\frac{3}{4}\right)=-2(x-4)^2+3.$$

Отсюда

$$(x-4)^2=-\frac{1}{2}(y-3).$$

Положив x’=x-4 и y’=y-3, перейдём к новой системе координат O’x’y’, начало которой находится в точке O’ (4; 3), а оси O’x’ и O’y’ сонаправлены с осями Ox и Oy. В результате получим простейшее уравнение данной параболы $x'^2=-\frac{1}{2}y'$. Отсюда 2p=1/2, т.е. p/2=1\8.



Итак, вершина параболы находятся в точке O’ (4; 3); координаты фокуса $x_F=x_{0'}=4$, $y_F=y_{0'}-\frac{p}{2}=3-\frac{1}{8}=\frac{23}{8}$, т.е. F (4; 23/8); уравнение оси параболы $x=x_{0'}=4$, т.е. x-4=0; уравнение директрисы $y_F=y_{0'}+\frac{p}{2}=3+\frac{1}{8}=\frac{25}{8}$, т.е. 8y-25=0

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить задачи

Вариант №1

1.Составить уравнение окружности проходящей через точки А (0; 2), В (1; 1), С (2; -2).
2.Составить каноническое уравнение эллипса, если даны его вершины (0; 3) и (0; -3), расстояние между фокусами равно 8
3.Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, проходящей через точки $M_1(-6; -\sqrt{7})$; $M_2(6\sqrt{2}; 4)$
4.Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, фокус которой находится в точке пересечения прямой 3х-2у+5=0 с осью ординат.

Вариант №2

1. Составить уравнение окружности, касающейся оси абсцисс в точке А (2; 0) и проходящей через точку В (-1; 3)
2.Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $9x^2 + 25y^2 = 225$
3.Составить каноническое уравнение гиперболы, если 2с=10, 2а=6
4.Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $y^2 = -12x$

Вариант №3

1.Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ и $x^2 + y^2 - 6y = 0$
2.Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ох, симметрично относительно начало координат, проходящего через точки M_1 (2; $2\sqrt{2}$). Малая ось его равна 6.
3.Составить каноническое уравнение гиперболы, если эксцентриситет ε=1,25, а действительная ось - 2а=16.
4.Найти вершину, фокус, ось и директрису параболы $x^2 - 8x + 8y + 8 = 0$

Вариант №4

1.Найти координаты центра и радиус окружности: $9x^2 + 9y^2 + 42x - 54y - 95 = 0$
2.Найти точку пересечения эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ с прямой $2x + 3y - 6 = 0$
3. Определить длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет гиперболы

$$16x^2 - 25y^2 = 400$$

4.Найти вершину, фокус, ось и директрису параболы $x^2 - 2x - 8y + 17 = 0$

Вариант №5

1.Составить уравнение окружности, описанной около треугольника, стороны которого задаются уравнениями: 9х-2у-41=0; 7х+4у+7=0; х-3у+1=0
2.Составить уравнение эллипса, фокусы которого расположены на оси Ох. Симметрично начала координат, зная, что М1 ($2\sqrt{3}$; $4\sqrt{10}$); М2 ($-\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{11}}{2}$)- точки эллипса.

3. Дана гипербола $24y^2 - 25x^2 = 600$. Определить длины осей, координаты вершин и уравнения асимптот.
4. Составить уравнение параболы, симметричной относительно оси Оу, имеющей вершину в начале координат, если она проходит через точку А (-2;4)

Вариант №6

1. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$ и $x^2 + y^2 - 6x = 0$
2. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $16x^2 + 25y^2 = 400$
3. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, проходящей через точки M_1 (-8; $2\sqrt{2}$) и M_2 (6; -1)
4. Определить координаты фокуса и составить уравнение директрисы параболы $x^2 = 32y$

Вариант №7

1. Составить уравнение окружности с центром в точке С(2;-3), проходящей через точку А(5;1).
2. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки А ($2\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$), В (6;0).
3. Составить каноническое уравнение гиперболы, если эксцентриситет ε=1,5, а фокусное расстояние - 2с=6.
4. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, директриса которой задана уравнением x+3=0

Вариант №8

1. Составить уравнение окружности проходящей через точки А (-1; 3), В (0;2), С (1; -1).
2. Найти длины осей, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $16x^2 + 25y^2 = 400$
3. Дана гипербола $36x^2 - 64y^2 = 2304$. Определить длины осей, координаты фокусов и уравнения асимптот.
4. Составить уравнение параболы, зная координаты фокуса (4;-2) и уравнение директрисы y-5=0

Вариант №9

1. Найти расстояние между центрами окружностей $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$ и $x^2 + y^2 = 16$
2. Найти точку пересечения эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$ с прямой $2x + 3\sqrt{3}y - 12 = 0$
3. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, проходящей через точки M_1(-4;3); M_2($\sqrt{10}$; -1,5)
4. Составить уравнение параболы, зная координаты вершины (-2; 4) и уравнение директрисы y+2=0

Вариант №10

1. Составить уравнение прямой, проходящей через центры окружностей $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ и $x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0$
2. Построить эллипс $x^2 + 4y^2 = 16$. Найти его фокусы и эксцентриситет.
3. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Ох, проходящей через точки M_1(9;-4) и полуось **а** равна 3.
4. Через фокус параболы $y^2=10x$ проведена хорда перпендикулярно к ее оси. Найти длину хорды.

Практическая работа №8

Тема: Вычисление пределов функции

Цель работы: научится вычислять пределы функций, используя различные способы

Найдите пределы функции

1 вариант

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+2}{x+1}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^2+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} (5x^2+2x-1)$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^2-x}$

5) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}} \frac{2x^2-x-3}{2x-3}$

6) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{5-\sqrt{22-x}}{1-\sqrt{4+x}}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^6-5x^3}{x^4+3x^3}$

8) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+1}$

9) $\lim\limits_{x\to -5} \frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}$

10) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{8-x^3}{4-x^2}$

2 вариант

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3-x}{4-x}$

2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{7x^2-1}{5x^3+4x^2-2x+1}$

3) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-6x+5}{x^2-25}$

4) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{5x+1}{x^3-2x+3}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{x^2+x}$

7) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^3+3x^2}{2x^3+7x^2}$

8) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

9) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$

1 0) $\lim\limits_{x\to 4} (x^4-2x+5)$

3 вариант

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5x^2}{x^2+7}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4x^3-5x^2+10x}{21x^3+7x+8}$

3) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{x^2+x+2}{x^3+1}$

4) $\lim\limits_{x\to0} \frac{4x^3-3x^2+x}{2x}$

5) $\lim\limits_{x\to-1} \frac{\sqrt{4+x-x^2-2}}{x+1}$

6) $\lim\limits_{x\to-6} \frac{x^2-36}{x+6}$

7) $\lim\limits_{x\to2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$

8) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-10x+21}{x^2-2x-3}$

9) $\lim\limits_{x\to2} (2x^2-3x+4)$

10) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x+1}{x}$

4 вариант

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x-1}{5x+2}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2x^2+5}{4x^2+1}-\frac{x^2+4}{2x^2+3}\right)$

3) $\lim\limits_{n\to\frac{1}{3}} \frac{3x^2+5x-2}{3x-1}$

4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-1}$

5) $\lim\limits_{x\to-6} \frac{x-6}{x+6}$

6) $\lim\limits_{x\to2} \frac{5x+1}{3x+2}$

7) $\lim\limits_{x\to2} \left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$

8) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x^2+x+1}$

9) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^3-2x^2+16x}{x^3-4x^2+8x}$

10) $\lim\limits_{x\to3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$

5 вариант

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x+2}-\frac{5}{2x+1}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x}+\frac{2x}{3x+1}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5-3x^3+x^2}{x^4+2x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-4x-21}{x-7}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+x+4}{14-x^2-x^3}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x^3-3x^2}{2x^2-5x^3}$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

9) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x+1}$

10) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

6 вариант

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^5-3x^3+x^2}{x^4+2x^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-7x+10}{x-5}$

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5+2x^2+14}{14x^5-x^2-x^3}$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{14x^3-3x^4}{2x^8-7x^3}$

8) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}$

9) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

10) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом функции?
2. Сформулируйте основные теоремы о пределах функции.
3. Раскрытие неопределенности вида 0/0.

Практическая работа№9

Тема: Дифференцирование функций

Цель работы: научиться дифференцировать функции

Краткий теоретический материал

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи как самой математики, так и естествознания и техники приводят к этому понятию.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке X. Возьмём из этого промежутка фиксированное значение аргумента x и придадим ему приращение Δx так, чтобы новое значение аргумента $x+\Delta x$ принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции $f(x)$ заменится новым значением $f(x)+\Delta y = f(x+\Delta x)$, т.е. функция получит приращение $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, называется *производной* функции $y = f(x)$ по аргументу x в точке x.

Производная обозначается одним из символов: y'_x, y', $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$, а её значение при $x=x_0$ обозначается $y'(x_0)$, $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x, то она называется *дифференцируемой* в этой *точке.*

Если функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка X, то говорят, что эта функция *дифференцируема на* этом *промежутке.*

Производная сложной функции. Пусть $y = f(u)$, где u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной *x:* $u=\varphi(x)$. Таким образом, $y = f(\varphi(x))$.

В этом случае функция y называется *сложной функцией x,* а переменная *u*-*промежуточным документом.*

Производная сложной функции находится на основании следующей теоремы: *если* $y = f(u)$ и $u=\varphi(x)$ *дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции* $y = f(\varphi(x))$. *существует и равна произведению производной функции y по промежуточному аргументу и по независимой переменной x:*

$$y'_x = y'_u y'_x.$$

Формула дифференцирования. Во всех приведённых ниже формулах буквами u и υ Обозначены дифференцируемые функции независимой переменной x: *u=u(x), u=u(x),* а буквами *a, c, n*- постоянные:

1. $c' = 0$
2. $x' = 1$
3. $(u \pm \upsilon)' = u' \pm \upsilon'$
4. $(u\upsilon)' = u\upsilon' + \upsilon u'$
5. $(cu)' = cu'$

$$6.\ \left(\frac{u}{\upsilon}\right)' = \frac{\upsilon u' - u\upsilon'}{\upsilon^2}$$

Остальные формулы записаны как для функций независимой переменной, так и для сложных функций:

7. $(x^n) = nx^{n-1}$.	7а. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
8. $\left(\frac{c}{x}\right)' = -\frac{c}{x^2}$	8а. $\left(\frac{c}{\upsilon}\right)' = -\frac{c\upsilon'}{c^2}$
9. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.	9а. $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
10. $(\sin x)' = \cos x$	10а. $(\sin u)' = \cos u u'$
11. $(\cos x)' = -\sin x$	11а. $(\cos u)' = -\sin u u'$
12. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	12а. $(tgu)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
13. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	13а. $(ctgu)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
14. $(a^x)' = a^x \ln a$	14а. $(a^u)' = a^u \ln a u'$
15. $(e^x)' = e^x$	15а. $(e^u) = e^u u'$
16. $(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	16а. $(\ln\lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$
17. $(\log_a \lvert x\rvert)' = \frac{1}{x\ln a}$	17а. $(\log_a \lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u\ln a}$, где $a > 0, a \neq 1$

При решении приведенных ниже примеров сделаны подробные записи. Однако следует научиться дифференцировать без промежуточных записей.

Пример 1

Найти производную функции $y = 5x^3 - 2x + \frac{3}{x}$.

Решение. Данная функция есть алгебраическая сумма функций. Дифференцируем ее, используя формулы 3, 5, 7 и 8:

$$y' = \left(5x_3\right)' - (2x)' + \left(\frac{3}{x}\right)' = 5\left(x_3\right)' - 2x' - \frac{3}{x^2} = 5\cdot 3x^2 - 2 - \frac{3}{x^2} = 15x^2 - 2 - \frac{3}{x^2}.$$

Пример 2

Найти производную функции $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Решение. Применяя формулы 6, 3, 7 и 1, получим

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)(x^2)' - (x^2+1)'x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1) - 2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Пример 3

Найти производную функции $y = \sin^3 \varphi$ и вычислить ее значение при $\varphi = \pi/3$:

Решение. Это сложная функция с промежуточным аргументом $\sin \varphi$. Используя формулы 7а и 10, имеем

$$f'(\varphi) = 3\sin^2 \varphi (\sin\varphi)' = 3\sin^2 \varphi \cos\varphi$$

Вычислим значение производной при $\varphi = \pi/3$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sin^2\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{1}{2} = 3\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{9}{8}$$

Пример 4

Найти производную функции $y = \frac{1}{2}\cos^2 x - \ln\cos x$

Решение. Это сложная функция с промежуточным аргументом $\cos x$. Применяя формулы 3, 5, 7а, 11, 16а, получим

$$y' = \left(\frac{1}{2}\cos^2 x\right)' - \left(\ln\cos x\right)' = \frac{1}{2}2\cos x\left(\cos x\right)' - \frac{(\cos x)'}{\cos x} = \cos x(-\sin x) - \frac{-\sin x}{\cos x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin x\left(1-\cos^2 x\right)}{\cos x} = \frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{\cos x} = tgx\sin^2 x$$

Пример 5

Найти производную функции $y = \frac{tgx(tgx-1)}{tgx}$

Решение. Дифференцируем данную функцию по формулам 6, 12, 3 и 1:

$$y' = \frac{tgx(tgx-1)' - (tgx-1)(tgx)'}{tg^2 x} = \frac{tgx\frac{1}{\cos^2 x} - (tgx-1)\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(tgx - tgx + 1)}{tg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \div \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. Сформулируйте теорему о производной постоянной функции.
3. Сформулируйте теорему о производной суммы (разности) функций.
4. Сформулируйте теорему о производной произведения функций.
5. Сформулируйте теорему о производной отношения функций.
6. Сформулируйте следствие из теоремы о производной произведения функций.
7. Как называется операция взятия производной функции.
8. Дайте определение сложной функции.
9. Сформулируйте правило нахождения производной сложной функции.
10. Напишите все формулы дифференцирования функций.

Найти производную функций:

Вариант№1

1. $y=\sqrt{5}\cdot x^2-\dfrac{x-4}{3}+6x$

2. $y=2^{tgx}$

3. $y=arctg\dfrac{3^x}{2}$

4. $y=(tgx^2)^2$

5. $y=4^x\cdot e^x$

6. $y=6x^2+7x+12$

7. $y=\dfrac{\cos(4x-5)}{2}$

8. $y=\dfrac{x^6}{1-x^4}$

9. $y=\sqrt{x\sqrt{x+3}}$

10. $y=\ln^3(\cos 3x)$

Вариант№2

1. $y=a^{\cos 4x}$

2. $y=5x^{\frac{9}{2}}+4x^{\frac{7}{2}}+2x^{\frac{5}{2}}$

3. $y=\sqrt{\cos(x^4-1)}$

4. $y=(1-x)\cdot(1-\sqrt[3]{x})$

5. $y=\ln(1+tgx)$

6. $y=8^{4-\sqrt{x}}$

7. $y=(x^3-1)^{10}$

8. $y=\dfrac{x^5}{x^3+2}$

9. $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$

10. $y=\arccos 5^x$

Вариант№3

1. $y=\sin(1-3^x)$

2. $y=e^{tgx^2}$

3. $y=\cos\ln e^x$

4. $y=\arcsin\sqrt{5-x}$

5. $y=5^x\cdot 3^x$

6. $y=6x^3+5x^2-\sqrt{3}$

7. $y=(1+2x^3)\cdot(4+3x^2)$

8. $y=\dfrac{x^3-3}{x^3+3}$

9. $y=6^{4x-3x^2}$

10. $y=tg(2x^2-4x+3)$

Вариант№4

1. $y=\sqrt{2x^5-4x+3}$

2. $y=tga^{4-x}$

3. $y=(1-2^x)^6$

4. $y=5^{\ln\cos x}$

5. $y=\sin x^2\cdot tg\sqrt{x}$

6. $y=\dfrac{5}{6}x^3-\dfrac{7}{9}x^6+5x$

7. $y=\arcsin\dfrac{2x)}{1-x^4}$

8. $y=\dfrac{x^3}{\sqrt{x}-2x^2}$

9. $y=\sqrt{x^3\sqrt{x-4}}$

10. $y=\sin^3\ln x$

Вариант№5

1. $y=\sqrt{3}\cdot x^{4}-\frac{x^{2}}{3}+6$

2. $y=2^{\cos x}$

3. $y=\arccos\frac{e^{x}}{2}$

4. $y=(\ln x^{2})^{2}$

5. $y=a^{x}\cdot e^{x}$

6. $y=ax^{2}+bx+c$

7. $y=\frac{\sin(2x-5)}{2}$

8. $y=\frac{x^{2}}{1-x}$

9. $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$

10. $y=\cos^{3}(\sin 3x)$

Вариант№6

1. $y=a^{tg(nx)}$

2. $y=6x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}$

3. $y=\sqrt{\sin(x^{2}-1)}$

4. $y=(1-x)\cdot(1-\sqrt{x})$

5. $y=4^{1-\sqrt{x}}$

6. $y=\ln(1+\lg x)$

7. $y=(x^{2}-1)^{100}$

8. $y=\frac{x^{3}}{x^{2}+2}$

9. $y=arctg\sqrt{x}$

10. $y=\cos^{4}(\cos 4x)$

Вариант№7

1. $y=tg(1-2^{x})$

2. $y=e^{\cos x^{2}}$

3. $y=2x^{3}+3x^{2}-\sqrt{5}\cdot x$

4. $y=\sin\ln e^{x}$

5. $y=arctg\sqrt{2-x}$

6. $y=(1+4x^{3})\cdot(1+2x^{2})$

7. $y=\frac{x^{2}-4}{x^{2}+4}$

8. $y=e^{4x-3x^{2}}$

9. $y=\frac{\cos x+1}{\cos x-1}$

10. $y=\ln(2x^{2}-4x+3)$

Вариант№8

1. $y=\sqrt{102x^{2}-45x+31}$

2. $y=\ln a^{1-x}$

3. $y=(1-24^{x})^{4}$

4. $y=e^{\ln\cos x}$

5. $y=tgx^{4}\cdot\cos\sqrt{x}$

6. $y=\frac{5}{6}x^{4}-\frac{7}{9}x^{2}+5$

7. $y=arctg\frac{2x}{1-x^{2}}$

8. $y=\frac{x^{2}}{\sqrt{x}-2x}$

9. $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^{2}}$

10. $y=4\cdot\cos^{2}3x$

Практическое занятие №10

Тема: Составление уравнений касательной и нормали, решение задач на механических смысл производной функции

Цель работы: научиться составлять уравнения касательной и нормали к кривой графика функции, вычислять вторую производную функции, решать задачи на физический смысл производной функции

Краткий теоретический материал

Геометрический смысл производной.

Производная функции имеет простую и важную геометрическую интерпретацию.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то график этой функции имеет в соответствующей2 точке касательную, причем угловой коэффициент касательной равен значению производной в рассматриваемой точке.

Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке (x_0, y_0), равен значению производной функции при $x = x_0$, т. е. $\Re_{кас} = y'(x_0)$.

Уравнение этой касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x - x_0).$$

Пример 1

Составить уравнение касательной к графику функции

$y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 2x + 3$ в точка A (3, 6)

Решение. Для нахождения углового коэффициента касательной найдем производную данной функции: $y' = \frac{2}{3}3x^2 - 2x - 2 = 2x^2 - 2x - 2$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции при $x = 3$

$k = y'(3) = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 - 2 = 18 - 6 - 2 = 10$

Уравнение касательной имеет вид

$y - 6 = 10(x - 3)$, или $y - 6 = 10x - 30$, т.е. $10x - y - 24 = 0$

Пример 2

Составить уравнение касательной, проведенной к графику функции $y = \frac{3x - 4}{2x - 3}$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Решение. Сначала найдем ординату точки касания $A(2, y)$. Так как точка А лежит на кривой, то ее координат удовлетворяют уравнению кривой, т.е.

$y = \frac{3 \cdot 2 - 4}{2 \cdot 2 - 3} = \frac{6 - 4}{4 - 3} = \frac{2}{1} = 2$ $\qquad A(2;2)$

Уравнение касательной, проведенной к кривой в точке $A(2;2)$, имеет вид $y - 2 = k(x - 2)$. Для нахождения углового коэффициента касательной найдем производную:

$$y' = \frac{(2x-3)(3x-4)' - (2x-3)'(3x-4)}{(2x-3)^2} = \frac{(2x-3)\cdot 3 - 2(3x-4)}{(2x-3)^2}$$

$$= \frac{6x - 9 - 6x + 8}{(2x-3)^2} = -\frac{1}{(2x-3)^2}$$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной функции при $x = 2$:

$$k = y'(2) = -\frac{1}{(2^2 - 3)^2} = -\frac{1}{1} = -1$$

Уравнение касательной таково:

$y - 2 = -(x - 2)$, $y - 2 = -x + 2$, т.е. $x + y - 4 = 0$.

Физический смысл производной.

Если тело движется по прямой по законы s=s(t), то за промежуток времени Δt (от момента е до момента $t + \Delta t$) оно пройдет некоторый путь Δs. Тогда $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ есть средняя скорость движения за промежуток времени Δt.

Скоростью движения тела в данный момент времени t называется предел отношения приращения пути Δs к приращению времени Δt, когда приращение времени стремится к нулю:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Следовательно, производная пути s по времени t равно скорости прямолинейного движения тела в данный момент времени:

$$v(t) = s_t.$$

Скорость протекания физических, химических и других процессов также выражается с помощью производных.

Производная функции $y = f(x)$ равна скорости изменения этой функции при данном значении аргумента x:

$$v(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Пример 1

Закон движения точки по прямой задан формулой $s = 5t^3 - 3t^2 + 4$ (s- в метрах, t- в секундах). Найти скорость движения точки в конце первой секунды.

Решение. Скорость движения точки в данный момент времени равна производной пути s по времени t.

$$v(x) = s' = 15t^2 - 6t,\ v(1) = 15 - 6 = 9$$

Итак, скорость движения точки в конце первой секунды равна 9м/с.

Пример 2

Тело брошенное вертикально вверх, движется по закону $s = v_0 - \frac{1}{2} gt^2$, где v_0- начальная скорость, g – ускорение свободного падения тела. Найти скорость этого движения для любого момента времени t. Сколько времени будет подниматься тело и на какую высоту оно поднимется, если $v_0 = 40$ м/с?

Решение. Скорость движения точки в данный момент времени равна производной пути s по времени t:

$$v(t) = s' = v_0 - \tfrac{1}{2} g \cdot 2t = v_0 - gt.$$

В высшей точке подъема скорость тела равна нулю:

$$v_0 - gt = 0,\ gt = v_0, t = v_0 / g,\ t = 40 / g \approx 4.1,\ t = 4.1c.$$

За 40/g секунд тело поднимается на высоту

$$s = 40\frac{40}{g} - \frac{1}{2} g \frac{1600}{g^2} = \frac{1600}{g} - \frac{800}{g} = \frac{800}{g} \approx 1.5, s \approx 81.5 \text{ м.}$$

Вторая производная.

Производная функции y=f(x) в общем случае является функцией от x.Если от этой функцией вычислить производную, то получим производную второго порядка или вторую производную функции y=f(x).

Второй производной функции y=f(x). Называется производная от ее первой производной $y' = f'(x)$

Вторая производная функции обозначается одним из символов - y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Таким образом $(y')' = y''$

Аналогично определяются и обозначаются производные любого порядка. Например, производная третьего порядка:

$(y'')' = y'''$ или $f'''(x), \frac{d^3y}{dx^3}$.

Пример 1

Найти вторую производную функции $f(x) = e^{\sin x}$.

Решение. Сначала найдем первую производную

$f'(x) = e^{\sin x}(\sin x)' = e^{\sin x}\cos x.$

Дифференцируя еще раз, найдем вторую производную:

$f^{ээ}(x) = e^{\sin x}(\cos x)' + (e^{\sin x})'\cos x = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x).$

Пример 12

Найти вторую производную функции $y = \frac{x^2+1}{x-1}$ и вычислить ее значение при x=2.

Решение. Сначала найдем первую производную:

$$y' = \frac{(x-1)(x^{2+1})' - (x-1)'(x^2+1)}{(x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-x^2-1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$$

Дифференцируя еще раз, найдем вторую производную:

$$y'' = \frac{(x-1)^2(x^2-2x-1)' - ((x-1)^2)'(x^2-2x-1) =}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{(x-1)^2(2x-2) - 2(x-1)(x^2-2x-1) =}{(x-1^4)}$$

$$= \frac{(x-1)(2(x-1)^2 - 2(x^2-2x-1))}{(x-1^4)} =$$

$$= \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x+1)}{(x-1)^3} = \frac{2\cdot 2}{(x-1)^3} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Вариант1

1. Найдите уравнение касательной к графику функции y=lnx в точке с абсциссой 1.
2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 18t + 3t^2$. Найдите его ускорение в момент времени $t_0 = 3c$.
3. Найдите производную функции

   а) $y = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2+1}}$

   б) $y = \ln(x - \cos x)$

в) $y = e^{\arccos\sqrt{x}}$

г) $y = \sqrt{x} + 3x^2 + \dfrac{2x}{x}$

д) $y = x^2 \cdot arctgx^2$

4. Найдите вторую производную

$y = x^2 \cdot \sin x$

Вариант2

1. Найдите уравнение нормали к графику функции $y = \cos 2x$ в точке абсциссой $\frac{\pi}{6}$.
2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 3t - 0.01t^2$. Определить его скорость в момент времени $t_0 = 7c$
3. Найдите производную функции

а) $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2 + x^{10}$

б) $y = \cos x^2 \cdot e^{\cos x}$

в) $y = \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{3}}$

г) $y = \ln^3 \cos x$

д) y= $4tg^3 4x$

4. Найдите вторую производную

$y = e^x + \ln x$

Вариант3

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \cos\dfrac{x}{2}$ в точке с абсциссой $\dfrac{\pi}{2}$.
2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^2 + t - 3$. Найдите его ускорение в момент времени $t_0 = 7c$.
3. Найдите производную функции

а) $y = 3x^2 + 12x + x^{-3}\ \sqrt{123}$

б) $y = \dfrac{a - x}{a + x}$

в) $y = a^{2\ln 3x}$

г) $y = \ln 3^{x^2}$

д) $y = tgx^2 - 3x$

4. Найдите вторую производную

$y = x \cdot \ln x$

Вариант4

1. Найдите уравнение нормали к графику функции $y = e^x$ в точке абсциссой, равной нулю.

2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 17t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3$. Определить его скорость в момент времени $t_0 = 3c$
3. Найдите производную функции

   а) $y = 2x^3 + 3x^2 - \sqrt{5x}$

   б) $y = (1 + 4x^2)(1 + 2^x)$

   в) $y = e^{\cos x^2}$

   г) $y = \ln(2x^2 - 4x + 3)$

   д) $y = tg(1 - 2^x)$
4. Найдите вторую производную

   $y = 2\sin x \cdot \cos x$

Вариант5

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $y=x^3+2x^2-4x-3$ в точке с абсциссой, равной -2.
2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = 2 + 12t + 2t^2 - \frac{1}{3}t^3$. Найдите его скорость в момент времени $t_0 = 1c$.
3. Найдите производную функции

   а) $y = \frac{3x}{2 - x}$

   б) $y = \ln(x^2 - \sin x)$

   в) $y = e^{\cos\sqrt{x}}$

   г) $y = 3\sqrt{x} + 5x^2 + \frac{2x}{x^2}$

   д) $y = x^3 \cdot tgx^2$

4. Найдите вторую производную

   $y = x^2 + \sin x$

Вариант6

1. Найдите уравнение нормали к графику функции $y=x^3+2x^2-3x$ в точке с абсциссой, равной 2.
2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t - 1$. Определить его скорость в момент времени $t_0 = 3c$
3. Найдите производную функции

   а) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^5 + x^3$

   б) $y = \sin x^2 \cdot e^{\sin x}$

   в) $y = arctg\sqrt{\frac{x}{3}}$

   г) $y = \ln^2 x^2$

   д) y= $4tg(4x - 3)$

4. Найдите вторую производную

$$y = e^x \cdot \ln x$$

Вариант8

1. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \sin 2x$ в точке с абсциссой $\frac{\pi}{2}$.
2. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 1$. Найдите его ускорение в момент времени $t_0 = 2c$.
3. Найдите производную функции

   а) $y = 3x^3 + \frac{2}{x} + x\sqrt{3}$

   б) $y = \frac{1-x}{2x}$

   в) $y = 2^{3x}$

   г) $y = tg\,3^{x^2}$

   д) $y = \ln x^2 - 2x$

4. Найдите вторую производную

$$y = 3x + \ln 2x$$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение производной функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной функции?
3. В чем состоит физический смысл первой производной функции?
4. Дайте определение второй производной функции.
5. В чем состоит физический смысл второй производной функции?
6. Запишите формулы нахождения производных степенной и показательной функций.
7. Запишите уравнение касательной к кривой в данной точке.
8. Дайте определение нормали к кривой.
9. Запишите уравнение нормали к кривой в данной точке.
10. Запишите формулы производных тригонометрических функций.

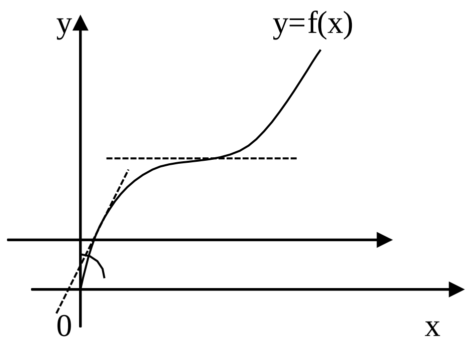
Практическая работа №11

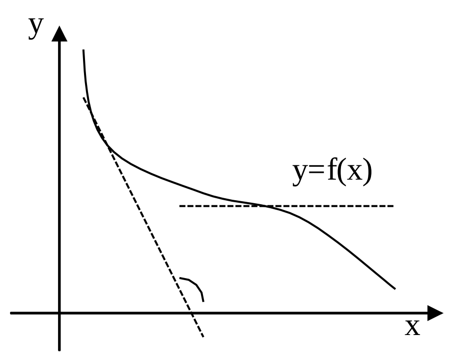
Тема: Исследование и построение графика функции

Цель работы: научиться исследовать функцию по ее аналитической формуле и строить график

Краткий теоретический материал

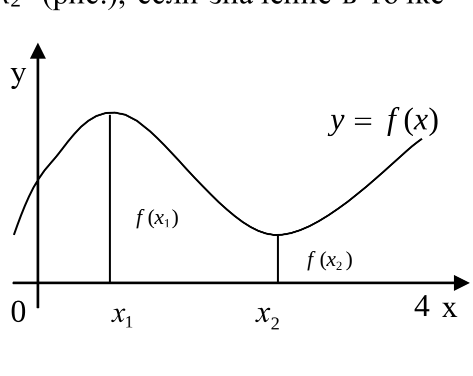
Условие постоянства функции. Дифференцируемая функция y = f (x) постоянна на промежутке **X** тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ внутри X.





Условие возрастания функции. Дифференцируемая функция y= f(x) монотонно возрастает на промежутке X тогда и только тогда, когда её производная не отрицательна внутри этого промежутка: $f'(x) \geq 0,$ причём производная $f'(x)$ обращается в нуль в конечном числе точек, лежащих внутри промежутка X.
Это условие геометрически означает, что касательная к графику монотонно возрастающей функции образует с положительным направлением оси Ох острый угол или параллельна ей (рис.41).
Условие убывания функции. Дифференцируемая функция y=f(x) монотонно убывает на промежутке X тогда и только тогда, когда её производная не положительна внутри этого промежутка: $f'(x) \geq 0,$ причём производная $f'(x)$ обращается в нуль в конечном числе точек, лежащих внутри X.
Это условие геометрически означает, что касательная к графику монотонно убывающей функции образует с положительным направлением оси Ох тупой угол или параллельна ей (рис. 42)
Экстремумы функции. Говорят, что функция y= f(x) имеет максимум в точке x_1 (рис.), если значения функции в этой точке больше, чем её значения во всех точках, достаточно близких к x_1, т.е. если $f(x_1 + \Delta x) < f(x_1)$ для любых Δx, как положительных, так и отрицательных, но достаточно малых по модулю.
Таким образом, $x = x_1$ - точка максимума, а $y_{\max} = f(x_1)$ - максимум функции.

Говорят, что функция $y = f(x)$ имеет *минимум* в точке x_2 (рис.), если значение в точке меньше, чем ее значения во всех точках, достаточно близких к x_2, т.е. если $f(x_2 + \Delta x) > f(x_2)$ для любых Δx, как положительных, так и отрицательных, но достаточных по модулю. Таким образом $x = x_2$ - точка минимума, а $y_{\min} = f(x_2)$ - минимум функции.



Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке имеет место *экстремум*. Значение функции в этой точке называется *экстремальным*.

З а м е ч а н и е. Следует помнить: 1) что максимум (минимум) не является обязательно наибольшим (наименьшим) значением, принимаемым функцией; 2) функция может иметь несколько максимумов или минимумов; 3) функция, определенная на отрезке, может достигать экстремума только во внутренних точках этого отрезка.

Н е о б х о д и м о е у с л о в и е э к с т р е м у м а. *Если функция* $y = f(x)$ *имеет экстремум при* $x = x_0$*, то ее производная в этой точке равна нулю, или бесконечности либо вовсе не существует, при этом сама функция в точке* x_0 *определена.*

Из этого следует, что точки экстремума функции следует разыскивать только среди тех, в которых ее первая производная равна нулю, или бесконечности, или не существует. Эти точки называются *критическими точками I рода*.

Этот признак экстремума является только необходимым. Поэтому , определив критические точки I рода , надо каждую из них в отдельности исследовать на основании достаточных условий экстремума.

П е р в о е д о с т а т о ч н о е у с л о в и е с у щ е с т в о в а н и я э к с т р е м у м а ф у н к ц и и. *Пусть точка* $x = x_0$ *является критической точкой I рода функции* $y = f(x)$*, а сама функция дифференцируема во всех точках некоторого промежутка, содержащего эту точку (за исключением, возможно, самой этой точки). Тогда:*

1) если при переходе слева направо через критическую точку I рода $x = x_0$ *первая производная меняет знак с плюса на минус, то в этой точке функция достигает максимума, т.е.* $x = x_0$ *- точка максимума,* $y_{\max} = f(x_0)$ *;*

2) если при переходе слева направо через критическую точку I рода $x = x_0$ *первая производная меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция достигает минимума, т.е.* $x = x_0$ *- точка минимума,* $y_{\min} = f(x_0)$ *;*

3) если при переходе через критическую точку I рода $x = x_0$ *первая производная не меняет знака, то в этой точке экстремума нет.*

Для исследования функции на экстремум по первой производной следует:

1. Найти область определения функции;
2. Найти первую производную функции и критические точки I рода;
3. Отметить границы области определения и критические точки I рода на числовой прямой;
4. Исследовать знак производной в каждом из полученных интервалов;
5. Выписать точки экстремума и вычислить экстремумы функции.

Пример 1

Найти экстремумы функции $y = (1 - x^2)^3$ Решение:

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in R$
2. Функция имеет производную всюду, поэтому определяем критические точки из условия Находим производную:
$$y' = 3(1 - x^2)^2(1 - x^2)' = 3(1 - x^2)(-2x) = -6x(1 - x^2)^2;$$
$$y' = 0, -6x(1 - x^2)^2 = 0, x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1$$
3. Отмечаем эти критические точки на числовой прямой.
4. Исследуем знак производной $y' = -6x(1 - x^2)^2$ в каждом из полученных интервалов $y' = (-2) \rhd 0, y'(-0,5) \rhd 0, y'(0,5) \lhd 0, y'(2) \lhd 0$

5. Точка x=0 – точка максимума, так как при переходе через нее слева направо производная меняет знак с плюса на минус: y_{max}=y(0)=1/ Njxrb x—1 и x=1 не являются точками экстремума.

Второе достаточное условие существования экстремума *Если в точке $x = x_0$ первая производная функции равна нулю ($f'(x_0) = 0$), а вторая производная отлична от нуля, то $x = x_0$ - точка экстремума. При этом если вторая производная в этой точке положительна ($f'(x_0) > 0$), то $x = x_0$ - точка минимума; если вторая производная в этой точке отрицательна ($f'(x_0) < 0$), то $x = x_0$ - точка максимума.*

Для исследования функции на экстремум по первой и второй производной следует:

1. Найти область определения функции.
2. Найти первую производную функции и стационарные точки, т.е. точки, в которых она обращается в нуль.
3. Найти вторую производную функции и исследовать ее знак в каждой стационарной точке.
4. Выписать точки экстремума и вычислить (если нужно) экстремумы функции.

Пример 2 Найти экстремумы функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Решение:

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in \mathbf{R}$.

2. Функция имеет производную всюду, поэтому критические точки определяем из условия $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x,\ \ f'(x) = 0,\ 3x^2 - 6x = 0, 3x(x-2) = 0,\ \ x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

3. Находим вторую производную функции $f'(x) = 6x - 6$. Исследуем знак второй производной в каждой критической точке: $f'(0) = -6 < 0$; значит, $x = 0$ - точка максимума, $y_{\max} = y(0) = 1$;

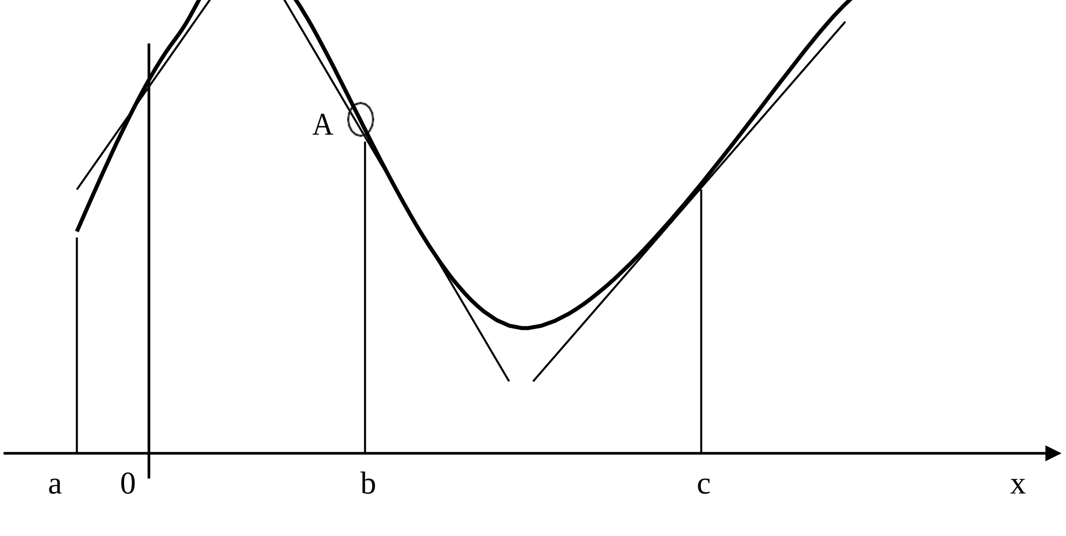
$f'(2) = 6 > 0$; значит, $x = 2$ - точка минимума,

$$y_{\min} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 1 = 8 - 12 + 1 = -3.$$

Направление вогнутости и точки перегиба кривой

Говорят, что на промежутке a<x<b кривая обращена выпуклостью вверх или выпуклостью ($\cap$) если она лежит ниже касательной, проведённой в любой её точке (см. рис.).

Говорят, что на промежутке b<x<c кривая обращена выпуклостью вниз или вогнута ($\cup$), если она лежит выше касательной, проведённой в любой её точке (см. рис.).



Точкой перегиба непрерывной кривой называется точка А, при переходе кривой называется точка А (см.рис.), при переходе через которую кривая меняет свою вогнутость на выпуклость или наоборот. Достаточно условие выпуклости (вогнутости) кривой. График дифференцируемой функции y = f(x) является **выпуклым** на промежутке a<x<b, если вторая производная функций отрицательна в каждой точке этого промежутка:
$f'(x) < 0$ при a<x<b.

График дифференцируемой функции y = f(x) является **вогнутым** на промежутке b<x<c, если вторая производная функции положительна в каждой точке этого промежутка: $f'(x) > 0$ при b<x<c.

Точки, в которых вторая производная функции равна нулю, или бесконечности, или не существует, называются **критическими точками** II **рода**.

Если при переходе через критическую точку II рода $x = x_0$ вторая производная функции меняет знак, то $x = x_0$ - абсцисса точки перегиба. Ордината точки перегиба равна значению функции в точке x_0. Точка $(x_0, f(x_0))$ - точка перегиба графика функции y = f(x).

Правило:

Чтобы найти направления вогнутости и точки перегиба кривой, следует:

1. Найти область определения функции.
2. Найти вторую производную функции и критические точки II рода.
3. Отметить границы области определения и критические точки II рода на числовой прямой.
4. Исследовать знак второй производной в каждом из полученных интервалов.
5. Записать промежутки выпуклости и вогнутости, абсциссу точки перегиба и вычислить её ординату.

Пример 3

Определить направление вогнутости и точки перегиба кривой $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$.

Решение:

1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in R$.

2. Найдем вторую производную функции и критические точки 2-го рода из условия

$$y' = 0:$$

$$y' = 4x^3 + 2 * 3x^2 - 12 * 2x - 5 = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 5;$$

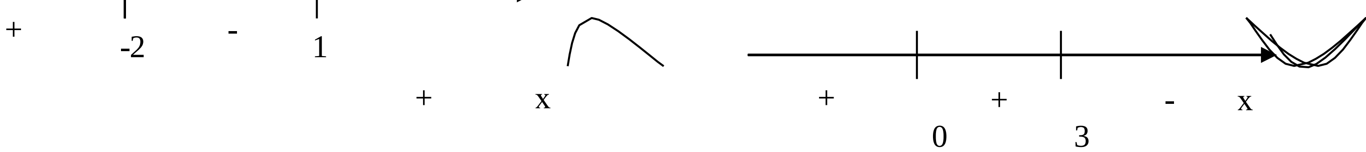
$$y' = 4 * 3x^2 + 6 * 2x - 24 = 12x^2 + 12x - 24;$$

$$y' = 12(x^2 + x - 2);$$

$$y' = 0 при x^2 + x - 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, x_1 = -2, x_2 = 1.$$

3. Отметим критические точки 2-го рода x = - 2 и x =1 на числовой прямой.



4. Исследуем знак второй производной в каждом из полученных интервалов: $y'(-3) > 0, y'(0) < 0, y'(2) > 0$.

5. Кривая вогнута при $x < -2, x > 1$; кривая выпукла при $-2 < x < 1$;

$$x_{m.n} = -2, y_{m.n} = y(-2) = 16 - 2*8 - 12*4 + 5*2 + 2 = -36;$$

$$x_{m.n} = 1, y_{m.n} = y(1) = 1 + 2 - 12 - 5 + 2 = 12.$$

Точки перегиба (-2, -36), (1,-12).

Общая схема исследования функций и построения их графиков

1. Найти область определения функции и поведение функции в границах области определения.
2. Выяснить вопрос о четности, нечетности и периодичности функции.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат.
4. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
5. Найти направление вогнутости и точки перегиба графика функции.
6. Построить график функции, используя все полученные результаты исследования. Если их окажется недостаточно, то следует найти еще несколько точек графика функции, исходя из ее уравнения.

Построение графика функции целесообразно выполнять по его элементам, вслед за выполнением отдельных пунктов исследования

Пример 4

Построить график функции $y = \dfrac{4x^3 - x^4}{5}$.

Решение.1. Областью определения функции служит множество всех действительных чисел, т.е. $x \in R$.

Далее, находим $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty, \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$.

2. Выясняем вопрос о четности или нечетности функции:

$$f(-x) = \frac{-4x^3 - x^4}{5}, f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x).$$

Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат:

$$Ox: \begin{cases} y=0, \\ x=0; \end{cases} \quad \begin{cases} y=0, \\ x=4; \end{cases} \quad Oy: \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

4.Находим промежутки монотонности и экстремумы функции:

$$y' = (\frac{4}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^4)' = \frac{4}{5}*3x^2 - \frac{1}{5}4x^3 = \frac{4}{5}x^2(3-x),$$

$$y' = 0 при x_1 = 0 и x_2 = 3.$$

Отметим критические точки I рода x=0 и x=3 на числовой прямой и исследуем знак производной в каждом из полученных интервалов: $y'(-1) > 0, y'(1) > 0, y'(4) < 0$.

Функция возрастает при $x < 3$ и убывает при $x > 3$; $x = 3$-точка *максимума*,

$$y_{\max} = y(3) = \frac{4*27-81}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4.$$

5.Находим направление вогнутости и точки перегиба графика функции:

$$y' = (\frac{12}{5}x^2 - \frac{4}{5}x^3)' = \frac{12}{5} * 2x - \frac{4}{5} * 3x^2 = \frac{12}{5}x(2 - x).$$

Итак, $y' = 0 при x_1 = 0, x_2 = 2.$

Отметим критические точки II рода x=0 и x=2 на числовой прямой и исследуем знак второй производной в каждом из полученных интервалов:

$$y'(-1) < 0, y'(1) > 0, y'(3) < 0.$$

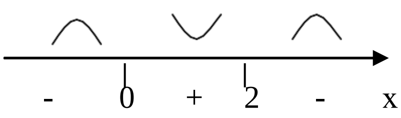
График функции является выпуклым при x<0 и x>2 и вогнутым при 0<x<2;

$x_{т.п.}=0$, $y_{т.п.}=y(0)=0$;

$x_{т.п}=2$, $y_{т.п.} = y(2) = \frac{4 \cdot 8 - 16}{5} = \frac{16}{5} = 3,2.$

Точки перегиба графика функции(0,0) и (2; 3,2).

Отметим все полученные точки в системе координат и соединим их плавной кривой (см.рис.).



Для уточнения графика найдем дополнительную точку y(-1)= -1.

К о н т р о л ь н ы е в о п р о с ы :

1. Дайте определение производной функции.
2. В чем состоит геометрический смысл производной?
3. В чем состоит физический смысл производной?
4. Дайте определение второй производной функции.
5. В чем состоит физический смысл второй производной?
6. Напишите все формулы дифференцирования.
7. Сформулируйте условие постоянства функции.
8. Сформулируйте условия возрастания и убывания функции.
9. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции.
10. 10.Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции.
11. 11.Как найти точки экстремума и экстремумы функции?
12. 12.Как найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке?
13. 13.Сформулируйте условия выпуклости и вогнутости кривой.
14. 14.Как найти направление вогнутости и точки перегиба кривой?

Работа выполняется по индивидуальному заданию.

Практическое занятие №12

Тема: Приложение дифференциала функции к приближенным вычислениям

Цель работы: научиться вычислять дифференциал функции и применять его к приближенным вычислениям

Вариант1

1. Найти dy

а) $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$

б) $y = \dfrac{1}{3} ctg^3 x$

в) $y = \arcsin \dfrac{3}{x^2}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 + 3x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}02$.

3. Найти приближенное значение функции $y = 4x^2 - 4x - 15$ при $x = -2{,}01$.

4. Вычислить:

а) $\dfrac{1}{(0{,}976)^2} \approx$

б) $\sqrt[4]{1{,}024} \approx$

Вариант2

1. Найти dy

а) $y = \sin 3x - \cos 3x$

б) $y = \ln \sqrt{x^2 + a^2}$

в) $y = 7^{tgx} \cdot \sqrt[3]{x^2}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}01$.

3. Найти приближенное значение функции $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2$ при $x = -1{,}02$.

4. Вычислить:

а) $(0{,}988)^4 \approx$

б) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1{,}036}} \approx$

Вариант3

1. Найти dy

а) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^2+a^2}$

б) $y=\ln\sqrt{x^2+4x}$

в) $y=e^{(3x+5)^2}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y=2x^2+3$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$.

3. Найти приближенное значение функции $y=x^3+\dfrac{9}{2}x^2-5$ при $x=2{,}01$.

4. Вычислить:

а) $\dfrac{1}{(1{,}024)^3}\approx$

б) $\sqrt[4]{0{,}964}\approx$

Вариант4

*1.*Найти dy

а) $y=tg3x+ctg3x$

б) $y=\sqrt[5]{(15+6x^5-8x^2)^4}$

в) $y=e^x\cdot\sin^4 x$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y=x^3-3x$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}02$.

3. Найти приближенное значение функции $y=x^4+5x^2-7$ при $x=1{,}01$.

4. Вычислить:

а) $(1{,}036)^3\approx$

б) $\sqrt[5]{0.975}\approx$

Вариант5

1. Найти dy

а) $y=\dfrac{e^{-2x}}{\cos 3x}$

б) $y=\ln\sin^2 2x$

в) $y=\sqrt{4-2x^2}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 + x - 1$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

3. Найти приближенное значение функции $y = x^2 + 3x + 1$ при $x = 3{,}02$.

4. Вычислить:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}012}} \approx$

б) $(0{,}996)^3 \approx$

Вариант6

1. Найти dy

а) $y = \sin^2 3x + 2^{\sqrt{x}}$

б) $y = \ln\sqrt{1 + \cos x}$

в) $y = \sqrt[5]{(4x^5 - 3x^2)^3}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = \dfrac{2}{x - 1}$ при $x = 3$ и $\Delta x = 0{,}001$.

3. Найти приближенное значение функции $y = 6 - x^3 + 5x$ при $x = 3{,}001$.

4. Вычислить:

а) $\left(\sqrt[4]{1{,}036}\right) \approx$

б) $\dfrac{1}{0{,}996} \approx$

Вариант7

1. Найти dy

а) $y = \dfrac{1 + tg\,2x}{1 - tg\,2x}$

б) $y = \sin^2 \dfrac{x}{3} \cdot ctg\,3x$

в) $y = e^{\ln tgx} + \sqrt{x^2 - 1}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^2 + 2x - 8$ при $x = -1$ и $\Delta x = 0{,}2$.

3. Найти приближенное значение функции $y = \dfrac{1}{4}x^3 - 3x + 2$ при $x = 4{,}1$.

4. Вычислить:

а) $(1{,}014)^5 \approx$

б) $\sqrt[3]{0{,}967} \approx$

Вариант8

1. Найти dy

а) $y = arctg\sqrt{2x}$

б) $y = \frac{1}{2}\sin 3x \cdot \sqrt{x^3 - 1}$

в) $y = e^{\sin^2 x}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = x^3 - x^2 + x - 3$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}03$.

3. Найти приближенное значение функции $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4$ при $x = 1{,}1$.

4. Вычислить:

а) $\sqrt[8]{1{,}024} \approx$

б) $\frac{1}{0{,}987} \approx$

Вариант9

1. Найти dy

а) $y = \frac{3x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 2}}$

б) $y = \frac{1}{3}tg^3 x$

в) $y = \frac{1}{3}\sin\frac{3}{x^2}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = \frac{1}{6}x^3 + 2x$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}01$.

3. Найти приближенное значение функции $y = 4x^2 - 4x - 15$ при $x = -1{,}01$.

4. Вычислить:

а) $\frac{1}{(0{,}976)^3} \approx$

б) $\sqrt[6]{1{,}024} \approx$

Вариант10

1. Найти dy

а) $y = 3^{\sqrt{x}} \cdot \cos 3x$

б) $y = \ln x^2$

в) $y = \dfrac{x^3 - 3}{2^x}$

2. Найти приближенное значение приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}001$.

3. Найти приближенное значение функции $y = 5x^3 - 2x + 3$ при $x = 2{,}01$.

4. Вычислить:

а) $(1{,}012)^4 \approx$

б) $\dfrac{1}{1{,}004} \approx$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение дифференциала функции.
2. Чему равен дифференциал независимой переменной (аргумента)?
3. Запишите формулу вычисления дифференциала функции.
4. В чем состоит геометрический смысл дифференциала функции?
5. Запишите формулы нахождения дифференциала степенной и показательной функций.
6. Что называется приращением функции?
7. Запишите формулу вычисления приближенного значения приращения функции.
8. Запишите формулу вычисления приближенного значения функции в данной точке.
9. Запишите формулу вычисления $\sqrt[n]{1 \pm \alpha}$.
10. Запишите формулы нахождения дифференциала тригонометрических функций.

Практическое занятие №13

Тема: Непосредственное интегрирование функций

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы, используя алгебраические, тригонометрические и другие равносильные преобразования подынтегральных функций.

Практическое занятие №14

Тема: Вычисление неопределенных интегралов

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы как непосредственно, так и методом подстановки

Вариант1

1. $\int (3x^2 - 9x^3 - 27x + 10)dx$
2. $\int \frac{dx}{49 + 49x^2}$
3. $\int \frac{\cos x}{3\sin x + 7}dx$
4. $\int \frac{x \cdot \sqrt[9]{x^7}}{x^3}dx$
5. $\int tgx dx$
6. $\int \cos\frac{3}{4}x dx$
7. $\int \frac{2e^x}{e^x + 3}dx$
8. $\int \cos x \cdot e^{4\sin x}dx$
9. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$
10. $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

Вариант2

1. $\int (3x^3 - 13{,}5x^3 - 36x + 54)dx$
2. $\int \frac{x \cdot \sqrt[5]{x} \cdot dx}{\sqrt[6]{x^5}}$
3. $\int \frac{5x^3}{3x^4 + 11}dx$
4. $\int \frac{x^7}{\sqrt{1 - x^8}}dx$
5. $\int tg^2 x dx$

6. $\int \frac{1}{6+6x^2}dx$

7. $\int \frac{2x+3x^2}{x}dx$

8. $\int \sin x \cdot e^{2\cos x}dx$

9. $\int \cos\frac{13}{21}xdx$

10. $\int \frac{\ln x}{x}dx$

Вариант3

1. $\int (3x^3-9x^2-x+0{,}5)dx$

2. $\int \frac{5x^4dx}{6x^5-83}$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

4. $\int \frac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

5. $\int e^{-3x}dx$

6. $\int \cos\frac{x}{8}dx$

7. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

8. $\int \cos^2 x\cdot\sin xdx$

9. $\int \frac{3}{1+9x^2}dx$

10. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^3}dx$

Вариант4

1. $\int (x^3+3x^2-4{,}5)dx$

2. $\int \frac{x\cdot\sqrt[7]{x}\cdot dx}{x^{-2}}$

3. $\int \frac{3\sin x}{\cos^4 x}dx$

4. $\int \frac{\sin x}{5+2\cos x}dx$

5. $\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}dx$

6. $\int \frac{3}{11+11x^2}dx$

7. $\int \frac{5x^2}{17x^3+3}dx$

8. $\int (\sqrt{2x} - \frac{1}{\sqrt{2x}})dx$

9. $\int \cos\frac{2}{5}xdx$

10. $\int \frac{\ln 3x}{x}dx$

Вариант5

1. $\int (4x^3 - 2x^2 - 8x + 10)dx$

2. $\int \frac{x^4 \cdot dx}{x \cdot \sqrt[9]{x^7}}$

3. $\int \frac{\cos x}{3+4\sin x}dx$

4. $\int \frac{3tgx}{\sin 2x}dx$

5. $\int e^{\sin x} \cdot \cos xdx$

6. $\int \frac{1}{25+25x^2}dx$

7. $\int \frac{arctgx}{x^2+1}dx$

8. $\int \sqrt{2x-2} \cdot dx$

9. $\int \sin 10xdx$

10. $\int \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}}dx$

Вариант6

1. $\int (20x^3 - 20x + 1)dx$

2. $\int \frac{x^2 \cdot \cdot \sqrt[7]{x^3}\, dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

3. $\int \frac{x \cdot \cos 3x + 2}{x} dx$

4. $\int \frac{(x+2)^2}{x} dx$

5. $\int e^{2x^2-2} \cdot (2x-1) dx$

6. $\int \frac{7x^4}{x^5 + 3} dx$

7. $\int \frac{3x^3}{\sqrt[3]{1+2x^4}} dx$

8. $\int \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$

9. $\int \cos \frac{3x-2}{5} dx$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} dx$

Вариант7

1. $\int (\frac{x^3}{5} - 1{,}5x^2 + 3{,}6x + 4{,}2) dx$

2. $\int \frac{5x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot dx}{x^4}$

3. $\int \frac{x^3}{5x^4 + 8} dx$

4. $\int \frac{1}{36 + 9x^2} dx$

5. $\int \sin^2 x \cdot \cos x dx$

6. $\int ctg^2 x dx$

7. $\int e^{x+3a^2} dx$

8. $\int (1-2x) \cdot (1+3x) dx$

9. $\int \cos(3x-5) dx$

10. $\int \frac{e^x}{1+e^x} dx$

Вариант8

1. $\int(\frac{x^3}{3}+x^2-\frac{4}{3}x-\frac{5}{4})dx$

2. $\int\frac{x^5\cdot\sqrt[8]{x^3}\cdot dx}{x\cdot\sqrt{x}}$

3. $\int\frac{1}{\cos^2 25x}dx$

4. $\int\frac{3x^5}{13x^6-9}dx$

5. $\int\sqrt{13-x}\cdot dx$

6. $\int\frac{ctgx}{\sin 2x}dx$

7. $\int\cos 21x\cdot dx$

8. $\int 3e^x\cdot\sqrt{1+e^x}\cdot dx$

9. $\int(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x}})dx$

10. $\int(3-2x)^2dx$

Вариант9

1. $\int(3x^3-22{,}5x^2+54x-63)dx$

2. $\int\frac{x\cdot\sqrt[5]{x}\cdot dx}{\sqrt[7]{x^4}}$

3. $\int\frac{x^5}{7x^6+3}dx$

4. $\int\frac{1}{\cos^2 6x}dx$

5. $\int\frac{1}{\sqrt{4-4x^2}}dx$

6. $\int\sin 23xdx$

7. $\int e^{x^3}x^2\cdot dx$

8. $\int(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})\cdot dx$

9. $\int\frac{1}{1-x}dx$

10. $\int \frac{1}{x \cdot \ln^3 x} dx$

Вариант10

1. $\int (-6x^2 + 15x - \frac{1}{2}) dx$
2. $\int \frac{x^7 \cdot \sqrt[8]{x^3} \cdot dx}{\sqrt[4]{x^3}}$
3. $\int \frac{1}{\sin^2 8x} dx$
4. $\int \frac{x^4}{7x^5 - 1} dx$
5. $\int \frac{5x^5}{\sqrt{1 - x^6}} dx$
6. $\int ctg^2 x dx$
7. $\int e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot dx$
8. $\int (\frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) \cdot dx$
9. $\int \frac{1}{1 + 4x^2} dx$
10. $\int \sin(12{,}5x) dx$

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Чему равен неопределенный интеграл от дифференциала функции?
4. Чему равен неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций?
5. Что понимают под непосредственным интегрированием?
6. Сформулируйте сущность интегрирования методом постановки.
7. Приведите схему интегрирования методом подстановки.
8. Каким действием можно проверить интегрирование?
9. Что происходит с постоянным множителем при взятии интеграла?

Напишите основные формулы интегрирования

Практическое занятие №15

Тема: Интегрирование по частям

Цель работы: научиться вычислять неопределенные интегралы методом: интегрирование по частям

Краткий теоретический материал

Пусть u и v – дифференцируемые функции от x. Применив формулу дифференциала произведения, получим

$d(uv) = udv + vdu \Rightarrow uv = \int udv + \int vdu,$
или

$$\boxed{\int udv = uv - \int udv.}$$ (1) - формула интегрирования по частям.

.Пример 1. Найти $\int xe^x dx.$

Решение. В этом примере множителем, упрощающимся от дифференцирования, является x . Положим $u = x, du = e^x dx,$ тогда $du = dx, u = \int e^x dx = e^x.$ Когда применяют интегрирование по частям и по dv находят v, произвольная постоянная не входит, из множества первообразных функций для v, берут какую-нибудь одну, наиболее удобную. Подставив в формулу (13.10) найденные выражения, получим

$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Укажем несколько типов интегралов, вычислять которые удобно интегрированием по частям.

1) $\int x^n e^x dx$, 2) $\int x^n \sin x dx$, 3) $\int x^n \cos x dx$.

В этих случаях за u принимаем x^n .

4) $\int x^n \ln x dx,$ за u принимаем lnx,

5) $\int x^n arctgx dx$, за u принимаем arctg x,

6) $\int x^n \arcsin x dx,$ за u принимаем arcsin x.

Пример 1. Найти $\int arctgx dx.$

Решение. Положим $u = arctgx, dx = dv; du = \frac{1}{1+x^2}dx, v = x.$

$\int arctgx dx = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2},$ но $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$

следовательно

$$\int arctgx dx = xarctgx - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант1

1) $\int (2\sin(3-2x) + 3\cos(3x-2))dx$

2) $\int \sqrt{2-5x}dx$

3) $\int (2x+1)e^x dx$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$

5) $\int x\sqrt{3x^2-1}dx$

6) $\int (2x^3-5x^2+7x)dx$

7) $\int (x^2-2x+3)\cos x dx$

8) $\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

9) $\int \frac{5-4\cos^2 x}{\cos^2 x} dx$

10) $\int \frac{32^x-2^x}{4^x} dx$

Вариант 2

1) $\int \frac{6x+7}{3x^2+7x+4} dx$

2) $\int \left(\frac{4}{\cos^2(x+4)} + \frac{5}{\sin^2(2x-1)} \right) dx$

3) $\int \left(5^{3-4x} + e^{x+2} \right) dx$

4) $\int (3x-4)\ln x dx$

5) $\int \sin\sqrt{x} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

6) $\int (3x^2+2x+\frac{1}{x})dx$

7) $\int (\frac{1}{\sqrt[x]{x^2}} - \frac{x+1}{\sqrt[4]{x^3}})dx$

8) $\int x\cos x dx$

9) $\int \frac{2-\sin x}{\cos^2 x} dx$

10) $\int \frac{\cos^2 x + 3\cos^3 x - 2}{\cos^2 x} dx$

Вариант 3

1) $\int \arccos x dx$

2) $\int x5^{-x^2} dx$

3) $\int (x-1)e^{3x}dx$

4) $\int \sqrt{3+x}dx$

5) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 2x} + \frac{3}{\sin^2 3x} - \frac{2}{e^{3x}} \right) dx$

6) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

7) $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$

8) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

9) $\int \frac{3x^2dx}{(2-x^3)^4}$

10) $\int \frac{(4-3\sqrt{x})^2}{x^2}dx$

Вариант 4

1) $\int (3-4\sin x)^{-\frac{1}{3}}\cos xdx$

2) $\int (x^2-x+1)\ln xdx$

3) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx$

4) $\int xarctgxdx$

5) $\int (x^2+3)\sin xdx$

6) $\int \frac{2\cos dx}{3\sin x+5}$

7) $\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}}dx$

8) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x}dx$

9) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

10) $\int (3e^x+5\cos x)dx$

Вариант 5

1) $\int (2x^3+3x-4)\arcsin 2xdx$

2) $\int (5\sin x-2\cos x+3ctgx+7)dx$

3) $\int x^3e^xdx$

4) $\int tg\,2xdx$

5) $\int (3x^2+5)\ln xdx$

6) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2}dx$

7) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

8) $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

9) $\int \frac{\sin 2x}{\sin x} dx$

10) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

Вариант 6

1) $\int xe^{-2x} dx$

2) $\int \frac{2\cos x dx}{3\sin x + 5}$

3) $\int x\cos(5x - 7)dx$

4) $\int \frac{2x+3}{x^4} dx$

5) $\int x^2 \sin x dx$

6) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$

7) $\int (3x^2 + 2x + \frac{1}{x})dx$

8) $\int \frac{2x+3}{x^4} dx$

9) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - x} dx$

10) $\int \frac{(x+1)(x^2 - 3)}{x^2} dx$

Вариант 7

1) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$

2) $\int \sqrt{4x - 5} dx$

3) $\int \frac{arctgx dx}{x^2 + 1}$

4) $\int \frac{3x^2 dx}{\sin^2 (x^3 - 2)}$

5) $\int \frac{\sqrt{tgx} dx}{\cos^2 x}$ ЁЁ

6) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x^2 + 3x - 1)^4}$

7) $\int e^{-x} x^2 dx$

8) $\int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 - x} dx$

9) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$

10) $\int (2x^3 - 5x^2 + 7x)dx$

Вариант 8

1) $\int \sqrt{4x-5}dx$

2) $\int \frac{(2x+3)}{(x^2+3x-1)^4}$

3) $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$

4) $\int \frac{dx}{x^2}$

5) $\int (3x-4)e^{3x}dx$

6) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{x^6+7}}$

7) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$

8) $\int \frac{2x+3}{x^4}dx$

9) $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$

10) $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx$

Практическое занятие №16

Тема: Вычисление определенных интегралов

Цель работы: научиться вычислять определенные интегралы

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант № 1

1. $\int_0^2 (2-x)^2 dx$
2. $\int_0^{\pi/2} 2\sin x dx$
3. $\int_0^4 \left(2\sqrt{x} - x^2\right) dx$
4. $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{x}dx$
5. $\int_{-1}^1 \left(5-3x^2-x\right)dx$
6. $\int_{-5}^9 \frac{xdx}{x^2+144}$
7. $\int_0^{\pi/3} e^{\cos x} \sin xdx$
8. $\int_2^4 \frac{15x}{(x^2-1)^3}dx$
9. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cdot \cos xdx$
10. $\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^4}$

Вариант № 2

1. $\int_1^8 \left(3 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$

2. $\int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\cos x dx$

3. $\int_{-1}^{1} \left(x^2 - 2\right)dx$

4. $\int_1^2 \frac{x-1}{x^3}dx$

5. $\int_0^1 (e^x + x)dx$

6. $\int_1^{-8} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$

7. $\int_0^1 \cos\frac{2\pi x}{T}dx$

8. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}dx$

9. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 5}dx$

10. $\int_{1,5}^3 \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}dx$

Вариант № 3

1. $\int_1^4 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

2. $\int_{-2}^2 (1+x)^2 dx$

3. $\int_{-1}^1 \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)dx$

4. $\int_1^8 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$

5. $\int_2^3 \frac{1+x^5}{x^4}dx$

6. $\int_{\pi/12}^{\pi/9} \frac{2dx}{3\cos^2 3x}$

7. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} 4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx$

8. $\int_{-1}^2 \frac{2x}{(2x^2+1)^2}dx$

9. $\int_0^3 \frac{2x}{16 + x^2}dx$

10. $\int_0^{0,4} \frac{5}{4 + 25x^2}dx$

Вариант №4

1. $\int_{-1}^0 \left(x^3 + 2x\right)dx$

2. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

3. $\int_1^{16} \left(\sqrt{x} - 2\right)dx$

4. $\int_1^2 \frac{1+x^7}{x^6}dx$

5. $\int_1^8 (1 - 4\sqrt[3]{x})dx$

6. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

7. $\int_0^{3\pi/2} \cos\frac{x}{3} \cdot dx$

8. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \sin x}dx$

9. $\int_1^2 (x^2 - 1)^3 x \cdot dx$

10. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}dx$

Вариант №5

1. $\int_{1}^{4}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

2. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{3\sin^2 x}dx$

3. $\int_{0}^{4}\left(1-\sqrt{x}\right)^2 dx$

4. $\int_{1}^{2}\frac{1-x^6}{x^5}dx$

5. $\int_{0}^{\pi/2}(\cos x-\sin x)dx$

6. $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 2x}$

7. $\int_{0}^{1}\sqrt{1-x}\cdot dx$

8. $\int_{1}^{5}x\sqrt{x^2-1}dx$

9. $\int_{0}^{1}\frac{6x^2}{1+2x^3}dx$

10. $\int_{0}^{\sqrt{3}}\frac{1}{3+x^2}dx$

Вариант №6

1. $\int_{0}^{2}\left(2-x\right)^2 dx$

2. $\int_{0}^{\pi/4}\sqrt{2}\cos x dx$

3. $\int_{1}^{4}\left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

4. $\int_{2}^{3}\frac{1+x^5}{x^4}dx$

5. $\int_{0}^{1}(e^x+x)dx$

6. $\int_{-2}^{0}\frac{dx}{(1-2x)^3}$

7. $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cdot dx$

8. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{3+2x^3}dx$

9. $\int_{2\sqrt{2}}^{4}x\sqrt{x^2-7}\cdot dx$

10. $\int_{0}^{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

Вариант № 7

1. $\int_{-2}^{2}\left(1-x\right)^3 dx$

2. $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin 2x dx$

3. $\int_{1}^{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)dx$

4. $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

5. $\int_{0}^{1}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

6. $\int_{0}^{\pi/4}\frac{dx}{2\cos^2 x}$

7. $\int_{0}^{\pi/2}(\cos x-\sin x)\cdot dx$

8. $\int_{1}^{8}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}dx$ $_{2}$

9. $\int_{-2}(1+x)^2\cdot dx$

10. $\int_{0}^{4}(2\sqrt{x}-x^2)dx$

Практическое занятие №17

Тема: Приложения определенного интеграла к решению задач

Цель работы: научиться применять геометрический смысл интеграла для вычисления площадей плоских фигур и объемов тел вращения

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение определенного интеграла.
2. Чему равен определенный интеграл с равными пределами интегрирования?
3. Чему равен определенный интеграл от алгебраической суммы функций?
4. Что происходит при перестановки пределов интегрирования местами?
5. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
6. Сформулируйте порядок вычисления определенного интеграла.
7. Как вычислить определенный интеграл методом подстановки?
8. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
9. Напишите формулу для определения площади плоской фигуры.
10. Напишите формулу нахождения объема тела вращения.

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант1

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$$y = x^2 + 1; \quad x = -3; \quad x = 3; \quad y = 0.$$
2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями: $y^2 = 4x$; x=4; x=9.
3. Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^1 \frac{dx}{6+6x^2}$

б) $\int_0^1 e^{x^3} \cdot x^2 dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx$

4. Найдите интеграл $\int tg 5x dx$

Вариант2

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$$xy - 2 = 0; \quad x=1; \quad x = 3; \quad y = 0.$$
2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями $y^2 = 6x$; x=1; x=3, y=0.

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_{-1}^3 (1 - 2x + 3x^2)dx$

б) $\int_0^{\sqrt{3}} 6\sqrt{x^4+16}\cdot x^3dx$

в) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}dx$

*4.*Найдите интеграл $\int \cos 3x\cdot\cos x\cdot dx$

Вариант3

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$y=\sin x$; x=0; $x=\pi$; $y=0$.
2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями $y^2=x$; x+y=2 ; y=0

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1+x^2}}$

б) $\int_0^1 3e^{x^3}\cdot x^2dx$

в) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2xdx$

*4.*Найдите интеграл $\int ctg^2 xdx$

Вариант4

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$y=5x^2$; x=1; x=2; $y=0$.
2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями

$$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$$

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$

б) $\int_0^{\pi} e^{\cos x}\cdot\sin xdx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}dx$

*4.*Найдите интеграл $\int 3^{x^4}x^3dx$

Вариант5

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$y=6x^2$; $x=3$; $x=4$; $y=0$.

2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной линиями

$$x^2 + y^2 = 1$$

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_2^3 \frac{xdx}{1+x^2}$

б) $\int_1^5 (x^3 - 3x) \cdot dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 xdx$

*4.*Найдите интеграл $\int 3^{x^4} x^3 dx$

Вариант6

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями

$y = x^2 - 2x + 3$; x=0; x=2; $y = 0$.

2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной линиями

$x^2 + y^2 = 9$; y=0

3. Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$

б) $\int_{-1}^{1} (1 - \sqrt[3]{x^2})dx$

в) $\int_{-1}^{2} (x^2 - 1)^3 xdx$

4.Найдите интеграл $\int \frac{2x}{x^2+3} dx$

Вариант7

1. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченную линиями

$y = x^2 - 3x$; $y = 0$.

2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной линиями $y^2 = 5x$; x=1; x=3, y=0

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$

б) $\int_1^4 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 - \cos x} dx$

4.Найдите интеграл $\int \cos^2 xdx$

Вариант8

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$y = 9x^2$; x=1; x=4; $y = 0$.

2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями: $y = x^3$; y=x.

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^1 \frac{5x^7\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$

б) $\int_1^2 (x+1)^2\,dx$

в) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tg^2 xdx$

4.Найдите интеграл $\int e^x \sqrt{1+e^x}\,dx$

Вариант9

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$y = x^2 - 4$; $y = 0$.

2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями: $y^2 = 8x$; x - 2=0

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{0,75} \frac{dx}{9+16x^2}$

б) $\int_2^3 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})dx$

в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 xdx$

4.Найдите интеграл $\int 7^{3\cos x} \sin xdx$

Вариант10

1. Найдите площадь плоской фигуры , ограниченную линиями
$y = x^3$; y=x

2. Найдите объем тела, полученного от вращения вокруг оси ОХ площади, ограниченной линиями: $y^2 = 4x$; y=2; x=0; x=4

3.Вычислите определенные интегралы

а) $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^x+5}$

б) $\int_0^2 (2x-1)^2\,dx$

в) $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

*4.*Найдите интеграл $\int tg^2 x dx$

Практическое занятие №18

Тема: Приложения определенного интеграла к решению физических и технических задач

Цель работы: научиться решать задачи на физический и технических смысл интеграла

Физические (механические) приложения определенного интеграла

а) Путь, *пройденный телом*, перемещающимся со скоростью $\upsilon = \upsilon(t)$, за промежуток времени $[t_1;t_2]$, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)dt. \qquad (1)$$

б) Работа *переменной силы*, заданной функцией F=F(x) и направленной вдоль оси Ох на отрезке [a;b], равна интегралу

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (2)$$

в) *Давление жидкости* на вертикальную пластину равно весу столба этой жидкости («закон Паскаля»), т.е. $P = g\gamma Sh$, где g – ускорение свободного падения, γ - плотность жидкости, S – площадь пластинки, h – глубина ее погружения.

Давление жидкости на вертикальную пластину, ограниченную линиями x=a, x=b, $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, вычисляется по формуле

$$P = g\gamma\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))xdx. \qquad (3)$$

Пример 1. Автобус начинает двигаться с ускорением $1 м/с^2$. Какой путь пройдет автобус за 12 секунд от начала движения?

○ Скорость движения автобуса выражается формулой $\upsilon = t м/с$. Согласно формуле (3.20) находим путь, пройденный автобусом за время от $t_1 = 0$ до $t_2 = 12 сек$.:

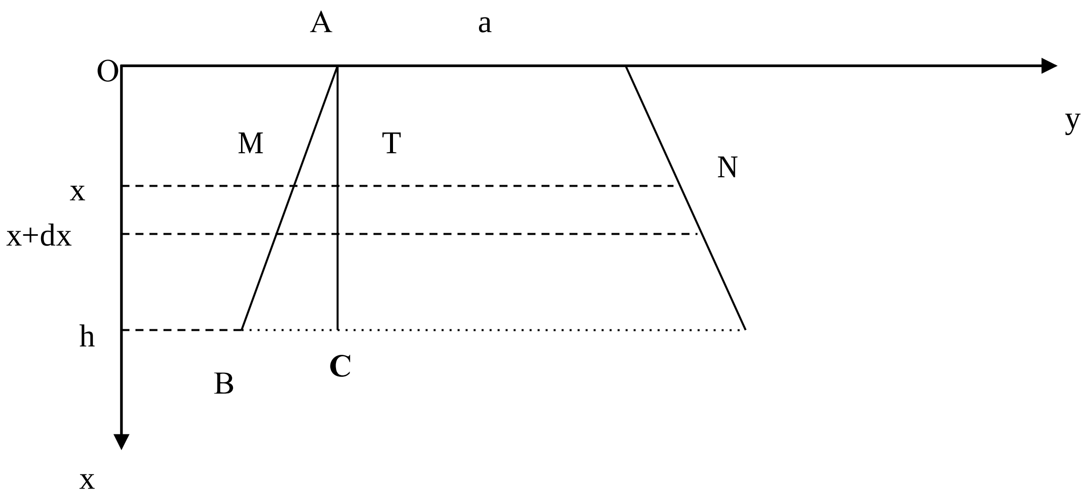
$$\int_0^{12} tdt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{12} = 72 м.$$

Пример 2. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если сила в 20 н растягивает пружину на 5 см?

Согласно закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению *x*, т.е. $F(x) = kx$, где *к* – коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи сила F=20 н растягивает пружину на x=0,05 м. Следовательно 20=к0,05, откуда к= 400, F=400x. Искомая работа согласно формулы (2) равна

$$A = \int_0^{0,1} 400x dx = 200x^2 \Big|_0^{0,1} = 2\text{дж}$$

Пример 3. Найти давление воды на вертикальную пластинку, имеющую вод равнобедренной трапеции, высота h=7 м, большее основание равно 10 м, меньшее – 5 м, лежащее на поверхности воды.



Давление жидкости на различные слои пластинки разное: зависит от глубины погружения *x*. Для решения задачи применим «метод дифференциала».

1. Пусть часть искомой величины *p* есть функция от *x: p=p(x)* – давление на часть пластинки (трапеции), соответствующее отрезку [0; x] $x \in [0; h], p(0) = 0; p(h) = P$
2. Дадим аргументу приращение $\Delta x = dx$. Функция получит приращение Δp. Найдем дифференциал этой функции. $dp = g\gamma |MN| dx \cdot x$. Найдем $|MN|$. Очевидно, что $|MN| = a + 2|MT|$. Длину $|MT|$ находим из подобия треугольников MTA и BCA: $\frac{x}{|MT|} = \frac{h}{\frac{b-a}{2}}$, откуда $|MT| = \frac{b-a}{2}\frac{x}{h}$. Тогда $|MN| = a + \frac{b-a}{h}x$ и $dp = g\gamma(a + \frac{b-a}{h}x)xdx$.
3. Интегрируем полученное равенство в пределах от x=0 до x=h, получим
$$P = g\gamma \int_0^h \left(ax + \frac{b-a}{h}x^2 \right) dx = \frac{1}{6} g\gamma h^2 (a + 2b)$$
4. Подставим значения по условию задачи, получим $P = \frac{1}{6} 10 \cdot 1000 \cdot 7^2 \cdot (5 + 2 \cdot 10) = \frac{49}{24} \cdot 10^6$ (н)

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

№1

Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $\upsilon = 2t + 3t^2$ м/с. Найти путь, пройденный телом, за 5 сек. от начала движения.

№2

Вычислить давление воды на вертикальную пластину имеющую форму равнобедренной трапеции, верхнее основание которой равно 38 м, нижнее 20 м, и высота 12 м. Уровень воды доходит до верха пластины.

№3

Какую работу надо затратить на преодоление силы тяжести при насыпании кучи песка (плотность γ) конической формы с радиусом, равным 2 м, и высотой, равной 1,5 м.

№4

Вычислить:

5. $\int_0^2 (2-x)^2\,dx$

3. $\int_{-5}^{9} \frac{x\,dx}{x^2+144}$

6. $\int_0^{\pi/2} 2\sin x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/3} e^{\cos x}\sin x\,dx$

Вариант 2

№1

Найдите путь, пройденный точкой за 4 секунду, зная ее скорость $\upsilon = 3t^2 - 2t - 3$.

№2

Треугольная пластина с основанием 0,9м и высотой 0,12м погружена в воду так, что ее вершина лежит на 0,03м ниже поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на вертикальную поверхность.

№3

Дубовая прямоугольная балка плавает в воде. Ее размеры: а= 4 м; в= 2 м; с= 0,5 м; плотность γ=0,8 кг/дм^3. Вычислить работу, необходимую для извлечения ее из воды.

№4

Вычислить:

6. $\int_{-2}^{2} (1-x)^3\,dx$

3. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

7. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin 2x\,dx$

4. $\int_0^{\pi/2} (\cos x - \sin x)\cdot dx$

Вариант 3

№1

Вычислить работу, которую надо совершить при сжатии пружины на 0,2 м, если для ее сжатия на 0,04м, нужна сила в 20 ньютонов.

№2

Определить давление воды на вертикальную пластинку, имеющую вид прямоугольника со сторонами 10м и 6м. Большая сторона лежит на поверхности воды.

№3

Для растяжения пружины на 4 см необходимо совершить работу 24 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

№4

Вычислить:

5. $\int_1^4 \left(2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

3. $\int_{\pi/12}^{\pi/9} \frac{2dx}{3\cos^2 3x}$

6. $\int_{-2}^{2} (1+x)^2 dx$

4. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} 4\sin^3 x \cdot \cos x \cdot dx$

Вариант 4

№1

Вычислить работу, которую надо совершить, чтобы сжать пружину на 0,08м, если для ее сжатия на 0,04м, была затрачена работа на 32 Дж.

№2

Определить давление воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, высота = 5 м.

№3

Найти путь, пройденный телом за 6 с от начала движения, если скорость движения имеет вид $V = 2t^2 + t$ (м/с).

№4

Вычислить:

6. $\int_{-1}^{0} \left(x^3 + 2x\right)dx$

3. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$

7. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{2\cos^2 x}$

4. $\int_0^{3\pi/2} \cos\frac{x}{3} \cdot dx$

Вариант 5

№1

Для растяжения пружины на 4см необходимо совершить работу в 48 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу в 150 Дж?

№2

Найти силу давление воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6м находится на поверхности воды. Плотность воды $\gamma = 1000 кг/м^3$, ускорение свободного падения $g = 10 м/c^2$.№3

Скорость движения тела имеет вид $V = 4t - \frac{6}{t^2}$ (м/с). Найти путь, пройденный телом за третью секунду.

№4

Вычислить:

5. $\int\limits_{1}^{4}\left(x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$

6. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\frac{1}{3\sin^2 x}dx$

3. $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 2x}$

4. $\int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x}\cdot dx$

Вариант 6

№1

Из одной точки в одном направлении одновременно начинают двигаться два тела со скоростями $V_1 = 3t^2 - 4t$ (м/с) и $V_2 = 4(t+3)$(м/с) соответственно. Через сколько секунд и на каком расстоянии тела снова будут вместе?

№2

Вычислить силу, с которой вода давит на плотину, сечение которой имеет форму равнобочной трапеции. Размеры трапеции (плотины): a = 7 м(низ), b= 12 м(вверх), h = 5 м. Считать, что плотность воды $\gamma = 1000 кг/м^3$, ускорение свободного падения $g = 10 м/с^2$.

№3

Рессора прогибается под нагрузкой 2 т на 1,5 см. Какую работу нужно затратить для деформации рессоры на 3 см? (Сила деформации пропорциональна величине деформации).

№4

Вычислить:

6. $\int\limits_{0}^{2}(2-x)^2 dx$

7. $\int\limits_{0}^{\pi/4}\sqrt{2}\cos x dx$

3. $\int\limits_{-2}^{0}\frac{dx}{(1-2x)^3}$

4. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3}\cos(\frac{\pi}{3}-x)\cdot dx$

Вариант 7

№1

Найти путь, пройденный телом за 3 с от начала движения, если скорость движения имеет вид $V = 3t^2 + 2t$ (см/с).

№2

Пластинка в виде треугольника с основанием a = 6 м и высотой h = 3 м вертикально погружена в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды. Вычислить силу давления вода на пластинку.

№3

Найти работу, которую надо затратить, чтобы выкачать воду из бочки в форме цилиндра диаметром, равным 60 см и высотой 1 м. Считать, что плотность воды $\gamma = 1000 кг/м^3$, ускорение свободного падения $g = 10 м/с^2$.

№4

Вычислить:

1. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$

2. $\int\limits_{0}^{1}\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$

3. $\int\limits_{-2}^{2}(1+x)^2\cdot dx$

4. $\int\limits_{0}^{4}(2\sqrt{x}-x^2)dx$

Вариант 8

№1

Найти работу, затраченную на выкачивание воды из корыта, имеющего форму полуцилиндра, длина которого H = 6 м, радиус – R = 40 см.

Считать, что плотность воды $\gamma = 1000 кг/м^3$, ускорение свободного падения $g = 10 м/с^2$.

№2

Вычислить силу давления воды на прямоугольные ворота шлюза, ширина которых а = 8 м, высота в = 6 м, если шлюз заполнен водой на одну треть.

№3

Из одной точки в одном направлении одновременно начинают двигаться два тела со скоростями $V_1 = 3t^2 - 4t$ (м/с) и $V_2 = 5t + \frac{5}{2}$ (м/с) соответственно. Через сколько секунд и на каком расстоянии тела снова будут вместе?

№4

Вычислить:

1. $\int_1^4 \left(2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$
2. $\int_{-1}^{1} \frac{1 + x^5}{x^4} dx$
3. $\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{3 + 2x^3} dx$
4. $\int_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2 - 7} \cdot dx$

Практическое занятие №19

Тема: **Частные производные. Полный дифференциал функции. Вычисление двойных интегралов**

Цель работы: научиться вычислять частные производные, полный дифференциал функции, двойные интегралы

Краткий теоретический материал

Понятие функции нескольких переменных

В случае одной вещественной переменной изучались функции, определенные на интервале или на отрезке. В случае многих переменных множество областей определения функций гораздо богаче.

О.1 Переменная z называется функцией двух переменных x и y, если каждой упорядоченной паре (x;y) значений двух независимых друг от друга переменных величин x и y из некоторой области D (области определения функции) соответствует единственное число z.

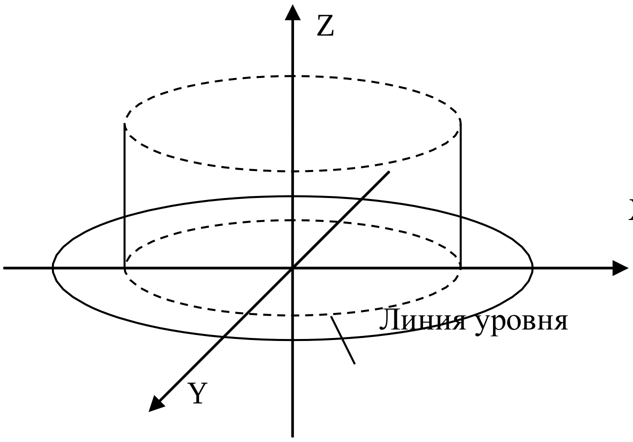
Обозначение: z= z(x;y). Здесь под числами x и y понимают координаты точки М, т.е. каждой точке плоскости соответствует только одно число **z.**

Множество D всех точек (x;y), при которых функция: z= z(x;y) имеет смысл, называется областью определения функции, а множество значений z, принимаемых функцией z= z(x;y) при (x;y) из D называется областью значения функции.

О.2 Множество точек трехмерного пространства с координатами (x;y;z) называется графиком функции z= z(x;y).

Для наглядного геометрического представления используют линии уровня. Линией уровня функции z= z(x;y) называется множество всех точек плоскости Oxy, в которых функция z принимает постоянное значение, т.е. z(x;y)=c, где c – постоянная.

Пример.1 Построить график функции $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$



Пример 2.

Дано: $z = \dfrac{(x^2 + y^2)}{2xy}$

Найти: а) z (2;3)

б) z(1; x/y)

в) z(x;-x)

О.3 Число В называется пределом функции z= z(x;y) в точке (x_o;y_o), если для любой последовательности точек (x_n;y_n)→ (x_o;y_o), где n=1,2,…, соответствующая числовая последовательность z_n= z(x_n;y_n) → B

$$B = \lim Z(x;y)$$

Обозначение: $x, y \to x_0, y_0$

Для введенного понятия предела функции двух переменных справедливы те же свойства, что и для одномерного случая. Вспомним их.

О.4 Функция z= z(x;y) называется непрерывной в точке (x_o;y_o), если она имеет предел при (x;y)→ (x_o;y_o) и этот предел равен значению функции в этой точке.

Понятие о частных производных. Полный дифференциал функции двух переменных

Рассмотрим функцию двух переменных z= z(x;y), определенную и непрерывную в некоторой области D. Будем считать, что точки с координатами (x;y), (x.+Δx;y+Δy), где Δx, Δy – приращения аргументов, также принадлежат области D.

О.1.Частным приращением функции z= z(x;y) по независимым переменным x и y называются разности

$$\Delta_x z = z(x + \Delta x; y) - z(x; y)\,; \quad \Delta_y z = z(x; y + \Delta y) - z(x; y)$$

О.2 Полным приращением функции z= z(x;y), соответствующим приращениям аргументов Δx, Δy называется разность $\Delta z = z(x + \Delta x; y + \Delta y) - z(x; y)$

О.3. Частной производной функции z= z(x;y) по переменным x и y называется предел отношения соответствующего частного приращения $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ к приращению данной переменной при условии, что приращение переменной стремится к нулю, т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

Практическое нахождение частных производных сводится к обычному дифференцированию по какой-либо переменной при условии, что все остальные переменные постоянны.

Если функция z= z(x;y) обладает частными производными, то можно говорить о ее главной (линейной) части приращения функции в точке, которое определяется как дифференциал функции.

О.4. Дифференциалом функции z= z(x;y) в точке (x_0;y_0), принадлежащей области D называется выражение вида

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант №1

1. Найти частные производные функции:

$$z = 3x^2 + xy - y^2 + 1$$

2. Найти полный дифференциал функций:

$$z = \cos xy \qquad ; \qquad z = \sqrt{x+y}$$

3. Найти значение полного дифференциала функции:

$$z = 2x + 3y - \sqrt{x^2 + y^2}$$ при x=4, y=3, Δx = 0,2, Δy =0,1.

4. Вычислить двойные интегралы:

$$\iint_D (y^2 - x)dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{y}{x} dxdy \qquad D: \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ x \le y \le 2x \end{cases}$$

Вариант №2

1. Найти частные производные функции:

$$z = x^4 + 3x^3y + 9x^2y - 8xy^2 + 5y^3$$

2. Найти полный дифференциал функций:

$$z = arctgxy \qquad ; \qquad z = \sqrt{x^2 - y^2}$$

3. Найти значение полного дифференциала функции:

$z = e^{2x^2 y}$ при x=1, y=1, Δx = 0,15, Δy =0,1.

4. Вычислить двойные интегралы:

$$\iint\limits_D x^3 e^{xy} dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x^2 \end{cases}$$

4.2 $$\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Вариант №3

1. Найти частные производные функции:

$$z = x^2 - xy + y^2$$

2. Найти полный дифференциал функций:

$$z = x^3 + y^3 \quad ; \quad z = \ln \sqrt{x^2 + 3y^5}$$

3. Найти значение полного дифференциала функции:

$z = 5x^3 + 2yx^2 + 3x^3 y^2$ при x=1, y=-1, Δx = 0,01, Δy =0,01.

4. Вычислить двойные интегралы:

$$\iint\limits_D \frac{1\, dxdy}{(x+y+1)^2} \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

Вариант №4

1. Найти частные производные функции:

$$z = x^2 y^4 - x^3 y^3 + x^4 y^2$$

2. Найти полный дифференциал функций:

$$z = \sin xy \quad ; \quad z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

3. Найти значение полного дифференциала функции:

$z = \sqrt[3]{x + y^2}$ при x=2, y=5, Δx = 0,1, Δy =0,01.

4. Вычислить двойные интегралы:

$$\iint_D e^y dxdy \qquad D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \ln x \end{cases}$$

$$\iint_D xydxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Вариант №5

1. Найти частные производные функции:

   $z = x^2y - xy^2$

2. Найти полный дифференциал функций:

   $$z = \frac{x+y}{x-y} \quad ; \quad z = \ln(x^3 + 2y^3)$$

3. Найти значение полного дифференциала функции:

   $z = x^3 + yx^2 + 3xy - x + y$ при x=2, y=2, Δx = 0,01, Δy =0,02.

4. Вычислить двойные интегралы:

$$\iint_D e^{x+y} dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dxdy \qquad D: \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ \frac{1}{x} \le y \le x \end{cases}$$

Вариант №6

4. Найти частные производные функции:

   $z = 3x^2y^3 - 2xy^5 + 5x^4y^2$

5. Найти полный дифференциал функций:

   $$z = tgx^2y \quad ; \quad z = (x^2 - y)(x - y^2)$$

6. Найти значение полного дифференциала функции:

   $z = \sqrt[3]{x^2 + y}$ при x=2, y=4, Δx = 0,2, Δy =0,1.

4. Вычислить двойные интегралы:

$$\iint_D \cos(x+y)dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ \pi \le y \le x \end{cases}$$

$$\iint_D \frac{y}{(1 - x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dxdy \qquad D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Практическое занятие №20

Тема: **Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными**

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Краткие теоретические сведения

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее функцию от совокупности переменных и их производных.

Общий вид такого уравнения $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$, где

F- известная функция своих аргументов, заданная в фиксированной области;
x - независимая переменная(переменная, по которой дифференцируется);
y - зависимая переменная (та, от которой берутся производные и та, которую надо определить);
$y', y'', ..., y^{(n)}$ - производная зависимой переменной y по независимой переменной x.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в него.

Например:
$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ - уравнение второго порядка,
$y' + xy = x$ - уравнение первого порядка.

Всякая функция, связывающая переменные и обращающая дифференциальное уравнение в верное равенство, называется *решением* дифференциального уравнения.
Например:

1. $y'_x - ax^{a-1} \cdot y = 0$, $y = e^{x^a}$ - решение.

Проверим:
$y'_x = (e^{x^a})'_x = (e^{x^a})'_{x^a}(x^a)'_x = e^{x^a} \cdot ax^{a-1} - ax^{a-1} \cdot e^{xa} = 0$
0=0

2. $x \cdot \dfrac{dy}{dx} - \sin x = 0$ |: x

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sin x}{x}$, т.е. $y'_x \dfrac{\sin x}{x}$

$dy = \dfrac{\sin x}{x} dx$. Проинтегрируем:

$y = \int \dfrac{\sin x}{x} dx$ - решение не выражается в элементарных функциях.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, c)$ от x и произвольной постоянной С, обращающая это уравнение в тождество по x.

Общее решение, записанное в неявном виде $\Phi = (x, y, C) = 0$, называется *общим интегралом.*

Частным решением уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется решение, полученное из общего решения при фиксированном значении $C: y = \varphi(x, C_0), где C_0$ - фиксированное число.

График любого частного решения дифференциального уравнения $F(x, y, y') = 0$ называется *интегральной кривой.* Общему решению (и общему интегралу) этого уравнения соответствует семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения n-го порядка (n= 1,2,3,…),удовлетворяющего начальным условиям вида

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = (x_0) = y_0^{(n-1)}$,

называется *задачей Коши.*

Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка состоит в том, чтобы найти решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.Другими словами, из всех интегральных кривых данного дифференциального уравнения требуется выделить ту, которая проходит через данную точку (x_0, y_0).

В случае уравнений первого порядка задача Коши ставится следующим образом:

Дано: $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0;\ y|_{x=x_0} = y_0$

Найти: y=y (x).

Пример, $y' = -\dfrac{y}{x};\ y|_{x=2} = 3$

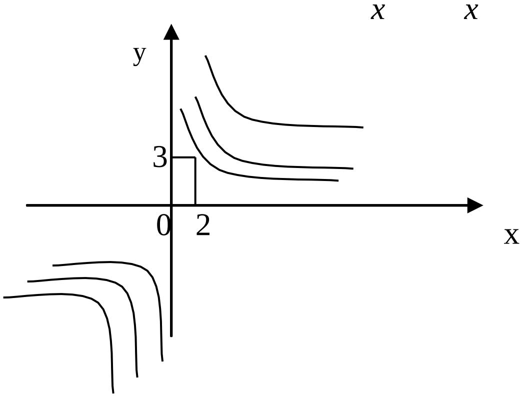
Общее решение: $y = \dfrac{C}{x}$

$3 = \dfrac{C}{2} \Rightarrow C = 6$

Частное решение: $y = \dfrac{6}{x}$.

Геометрическая интерпретация решений дифференциальных уравнений
Общее решение определяет семейство кривых x, называемых *интегральными кривыми*, а частное решение определяет одну единственную кривую.

Например: $y' = -\dfrac{y}{x};\ y = \dfrac{C}{x} - \textit{общее};\ y = \dfrac{6}{x} - \textit{частное};\ y|_{x=2} = 3.$



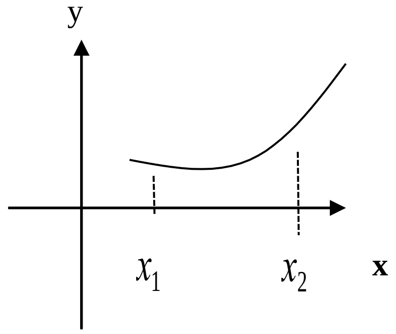
Наряду с задачей Коши рассмотрим граничные (краевые задачи); в которых условия задаются не в одной точке, а на концах некоторого интервала [a,b] и разыскивается решение внутри этого интервала.

Условия, задаваемые на концах интервала, называются *граничными условиями.* Они используются в дифференциальных уравнениях порядка выше первого.

Геометрический смысл дифференциального уравнения

Знаем, что общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых, частное решение - одну единственную интегральную кривую. А что же представляет собой дифференциальное уравнение с точки зрения геометрии?

Рассмотрим $y' = f(x, y)$. Видно, что дифференциальные уравнения не связывают непосредственно x и y (т. е. абсциссу и ординату точки кривой). Зато, когда x и y оба положительно заданные значения, можно определить значение первой производной y' , а именно тангенс угла наклона касательной, проведенной к данной кривой в этой точке. Дифференциальное уравнение определяет кривую, указывая направление, в котором эта кривая проходит в каждой ее точке.



Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными, если его можно представить в виде

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

можно переписать в виде $\dfrac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$).

Если $f_2(y) \neq 0, \textit{тогда} \dfrac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$.

Интегрируем: $\int \dfrac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$.

Чтобы решить уравнение такого вида надо:

1. Разделить переменные;
2. Интегрируя уравнение с разделенными переменными, найти общее решение данного уравнения;
3. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным условиям (если они заданы).

Пример 1. Решить уравнение $ydy = xdx$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию y=4 при x=-2.

Решение: Это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, находим общее решение уравнения:

$$\int ydy = \int xdx, \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}.$$

Для получения более простого по форме общего решения постоянное слагаемое в правой части представлено в виде C/2. Тогда $y^2 = x^2 + C$.

Подставив в общее решение значения y=4 и x=-2, получим 16=4+C, откуда C=12.

Итак, частное решение уравнения, удовлетворяющее данному условию, имеет вид

$$y^2 = x^2 + 12.$$

Пример 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $xy' - y = y^3$.

Решение: Так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то $\dfrac{xdy}{dx} - y = y^3$, откуда $xdy = (y^3 + y)dx$.

Разделим обе части уравнения на произведение $xy(y^2 + 1)$: Получим

$$\frac{dy}{y(y^2 + 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Преобразуем дробь: $\frac{1}{y(y^2+1)} = \frac{y^2+1-y^2}{y(y^2+1)} = \frac{y^2+1}{y(y^2+1)} - \frac{y^2}{y(y^2+1)} = \frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1}$.

Тогда $(\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1})dy = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим

$$\int (\frac{1}{y} - \frac{y}{y^2+1})dy = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2}\int \frac{d(y_2+1)}{y^2+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| - \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \ln|x| + \ln|C_1|.$$

Для облегчения потенцирования и получения более простого по форме общего решения постоянное слагаемое в правой части представлено в виде $\ln|C_1|$. После потенцирования получим

$$\frac{|y|}{\sqrt{y^2+1}} = |C_1| \cdot |x|, \text{ откуда}$$

$$\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = \pm C_1 x, \textit{или} \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx, \textit{где} C = \pm C_1.$$

Произведение $xy(y^2+1) = 0$ при x=0 и y=0. При этих значениях x и y дифференциальное уравнение не теряет числового смысла, поэтому x=0 и y=0 – решения уравнения, но решение y=0 входит в решение $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx$ при C=0.

Значит, решения уравнения имеют вид $\frac{y}{\sqrt{y^2+1}} = Cx$ и x=0.

Пример №3. Решить дифференциальные уравнения:

$$y' = \frac{2x}{3y^2+1}$$

Заменим y' на $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2+1}$$

Умножим обе части уравнения на dx и $(3y^2+1)$

$$2xdx = (3y^2+1)dy$$

Проинтегрируемобе части уравнения

$$\int (3y^2+1)dy = \int 2xdx + C$$

Получим

$$y^3 + y - x^2 = C - \textit{общее} - \textit{решение}$$

Пример №4. Решить уравнение $y' = -\frac{y}{x}$, удовлетворяющее условию y(4)=1

$y' = -\frac{y}{x}$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ можно интегрировать

$\ln|y| = \ln|c| - \ln|x|$

т.е. $y = \frac{c}{x}$ - общее решение. Найдем значение С, удовлетворяющее начальному условию

$1 = \frac{c}{4}$, отсюда c = 4. Найденное значение С подставляем в общее решение и получаем

$y = \frac{4}{x}$ - частное решение

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

1) $x + y'(y + xy) = 0$
2) $y \cdot y' + x = 0$
3) $(x \cdot y + x)\frac{dy}{dx} = 1$
4) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$
5) $y' = \frac{x \sin x}{y \cos y}$

Вариант 2

1) $y' = tgx \cdot tgy$
2) $x \cdot y' = 2y$
3) $y' + \sqrt{\frac{1 - y^2}{1 - x^2}} = 0$
4) $x \cdot y' = \ln|x|$
5) $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$

Вариант 3

1) $y' = \frac{x}{y}$
2) $(x + 1) \cdot y' + xy = 0$
3) $\cos x \cdot \sin y \cdot dy = \cos y \cdot \sin x \cdot dx$
4) $y \cdot y' = \frac{1 - 2x}{y}$
5) $y \cdot e^{2x} \cdot dx - (1 + e^{2x}) \cdot dy = 0$

Вариант 4

1) $y^2 y' + x^2 = 1$
2) $y' \cdot \sqrt{1 - x^2} = 1 + y^2$
3) $e^x \cdot (1 + e^y) \cdot dx + e^y \cdot (1 + e^x) \cdot dy = 0$

4) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

5) $y' = \dfrac{1}{2 \cdot x \cdot y}$

Вариант 5

1) $(x \cdot y - x) \cdot dx + (x \cdot y - y) \cdot dy = 0$

2) $dy - 2 \cdot \sqrt{y} \cdot \ln x \cdot dx = 0$

3) $y' = x^2 e^x$

4) $x\sqrt{1-y^2}\,dx + \sqrt{1-x^2}\,dy = 0$

5) $y^2 \cdot dx + (x-2) \cdot dy = 0$

Вариант 6

1) $x^2 y' - 2xy = 3y$

2) $(1+x^2) \cdot dy - (xy + 2x) \cdot dx = 0$

3) $xy' = \ln|x|$

4) $\dfrac{y'}{\sin x} = y \cdot \ln y$

5) $\dfrac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos y} = ctgx \cdot \sin y \cdot dy$

Вариант 7

1) $x + y'(y + xy) = 0$

2) $y \cdot y' + x = 0$

3) $(x \cdot y + x)\dfrac{dy}{dx} = 1$

4) $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$

5) $y' = \dfrac{x \sin x}{y \cos y}$

Вариант 8

1) $y' = tgx \cdot tgy$

2) $x \cdot y' = 2y$

3) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

4) $x \cdot y' = \ln|x|$

5) $\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$

Вариант 9

1) $y' = \dfrac{x}{y}$

2) $(x+1)\cdot y' + xy = 0$

3) $\cos x \cdot \sin y \cdot dy = \cos y \cdot \sin x \cdot dx$

4) $y \cdot y' = \dfrac{1-2x}{y}$

5) $y \cdot e^{2x} \cdot dx - (1+e^{2x})\cdot dy = 0$

Вариант 10

1) $y^2 y' + x^2 = 1$

2) $y' \cdot \sqrt{1-x^2} = 1 + y^2$

3) $e^x \cdot (1+e^y)\cdot dx + e^y \cdot (1+e^x)\cdot dy = 0$

4) $y' + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$

5) $y' = \dfrac{1}{2\cdot x\cdot y}$

Практическое занятие №21

Тема: **Решение дифференциальных уравнений**

Цель работы: научиться решать дифференциальные уравнения первого порядка и второго порядка

Краткие теоретические сведения

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Однородной функцией относительно x и y называется функция, все члены которой имеют одинаковую степень.

Например: $P(x,y) = x^2 - 2xy$ - вторая степень;

$Q(x,y) = 2x + \sqrt{x^2 + y^2} - 3y$ - первая степень;

$g(x,y) = x^2 y - xy^2$ - третья степень.

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *однородным*, если его можно представить в виде $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, где $P(x,y) и Q(x,y)$- однородные функции одинаковой степени.

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = zx$, где $z = \dfrac{y}{x}$ - новая неизвестная функция.

Пример 1. Решить уравнение $(x^2 - 2y)dx + 2xydy = 0$

Решение: Проверим, является ли уравнение однородным

$P(x, y) = x^2 + -2y^2$ второй степени

$Q(x, y) = 2xy$ - второй степени, следовательно, уравнение однородное.

Подстановка: $y = zx$, $dy = zdx + xdz$

$(x^2 - 2z^2 x^2)dx + 2xzx(zdx + xdz) = 0$

$(x^2 - 2z^2 x^2)dx + 2xzx(zdx + xdz) = 0$

$x^2(1 - 2z^2)dx + 2x^2 z^2 dx + 2x^3 zdz = 0$

$x^2 dx - 2x^2 z^2 dx + 2x^2 z^2 dx + 2x^3 zdz = 0$

$2x^3 zdz = -x^2 dx \,|: x^3$

$$2zdz = -\frac{dx}{x}$$

$$2\int zdz = -\int \frac{dx}{x}$$

$z^2 = -\ln|x| + C$

$z^2 + \ln|x| = \ln C$

$$\frac{y^2}{x^2} = -\ln|x| + \ln C$$

$$Ответ: x = C \cdot e^{-\frac{y^2}{x^2}}$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения $2xyy' = x^2 + y^2$ $y|_{x=1} = 2$

Решение: $2xydy = (x^2 + y^2)dx$ - однородное.

$y = zx$

$dy = zdx + xdz$

$2xzx(zdx + xdz) = (x^2 + x^2 z^2)dx$

$2x^2 z^2 dx + 2x^3 zdz = x^2(1 + z^2)dx$

$-2x^2 z^2 dx + x^2 z^2 dx + x^2 dx = 2x^3 zdz$

$x^2 dx - x^2 z^2 dx = 2x^3 zdz$

$$-\int \frac{dx}{x} = \int \frac{2zdz}{1 - z^2}$$

$\ln|x| + \ln C = -\ln|1 - z^2|$

$\ln|x| + \ln|1 - z^2| = \ln C$

$x|1 - z^2| = C$

$x\left|1 - \frac{y^2}{x^2}\right| = C$

$\frac{x^2 - y^2}{x} = C$

$\left|\frac{1 - 4}{1}\right| = C \Rightarrow C = 3$

$\frac{x^2 - y^2}{x} = 3$

Ответ $: x^2 - y^2 + 3x = 0$

Пример 3. Решить уравнение $(x - y)ydx - x^2 dy = 0$

Решение: $(xy - y^2)dx - x^2 dy = 0$ - однородное.

$y = zx$

$dy = zdx + xdz$

$(x^2 z - z^2 x^2)dx - x^2(zdx + xdz) = 0$

$x^2 zdx - z^2 x^2 dx - x^2 zdx - x^3 dz = 0$

$-z^2 x^2 dx = x^3 dz \; |: x^3 z^2$

$$+\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dz}{z^2}$$

$+\ln|x| + \ln C == +z^{-1}; \ln C|x| = \frac{1}{z}$

$Cx = e^{\frac{1}{z}}$

Ответ $: Cx = e^{\frac{x}{y}}$

Дифференциальные уравнения порядка выше первого

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается путем последовательного интегрирования обеих частей уравнения. Чтобы получить общее решение, надо проинтегрировать n раз.

Пример 1. Решить уравнение $y' = 1 - 2x$.

Решение: $y' = \int (1 - 2x)dx = x - x^2 + C_1$

$$y = \int (x - x^2 + C_1)dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$$

Пример 2. Решить уравнение $y'''' = \cos x$

Решение: $y''' = -\sin x + C_1$

$y'' = -\cos x + C_1 x + C_2$

$y' = -\sin x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

$y = \cos x + \frac{C_1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{C_2}{2} x^2 + C_3 x + C_4$

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

1. Найти общее решение

1. $yy' - x^2 yy' + x + xy^2 = 0$

2. $x^2 + xy = \frac{y^2}{y'}$

3. $y'' \cdot \sin^2 x = 1$

2. Найти частное решение

1. $\sqrt{x}dy - \sqrt{y}dx = 0$ $\quad y\big|_{x=0} = 0$

2. $\frac{d^2 y}{dx^2} = 5$ $\quad y\big|_{x=2} = 5$**;** $y\big|_{x=4} = 11$

Вариант 2

1. Найти общее решение

1. $(1 + x^5)y' = x^4 y + x^4$

2. $xy - y^2 - x^2 y' = 0$

3. $y'' \sec^2 3x = 1$

2. Найти частное решение

1. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$ $\quad y(0) = 1$

2. $d^2 y = x^2 dx^2$ $\quad y(0) = 0$

$y(1) = 2$

Вариант3

1. Найти общее решение

1. $xy = (x^2 - 1)y'$

2. $xdy = ydx + ydy$

3. $x^2 y'' = 2$

2.Найти частное решение

1. $tgx \cdot y' = 1 + y$ $\qquad y\|_{x=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}$

2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = 1 - 2x;$ $\qquad y|_{x=0} = 1; \qquad y|_{x=1} = \dfrac{1}{6}$

Вариант 4

1. Найти общее решение

1. $xy^2 + x + (x^2 y - y)y' = 0$

2. $y^2 + x^2 y' = xyy'$

3. $d^2 y = (\sin x + \cos x)dx^2$

2. Найти частное решение

1. $\dfrac{1}{y'} = 2y^2 - 5$ $\qquad y|_{x=-4} = 1$

2. $y'' = x - 8$ $\qquad y|_{x=0} = 3 \qquad y|_{x=2} = \dfrac{1}{2}$

Вариант 5

1. Найти общее решение

1. $\dfrac{xy + x}{dy} = \dfrac{1}{dx}$

2. $xy^2 y' = x^3 + y^3$

3. $y'' + 3 = \cos 5x$

2. Найти частное решение

1. $x^2 dy - \frac{1}{2} y^3 dx = 0$ $\qquad$ y(-1)=1

2. $y' = 4$ $\qquad y|_{x=1} = 0$**;** $\qquad y|_{x=0} = 2$

Вариант 6

1. Найти общее решение

1. $2(x^3 y - 3y) = xy'$

2. $2xdy = (2x + y)dx$

3. $y''\cos^2 x = 1$

2. Найти частное решение

1. $(1-x^2)y'+xy = 0$ $\qquad y\big|_{x=0}^{=4}$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -1$ $\qquad y\big|_{x=4} = 2 \quad ; \quad y\big|_{x=2} = 0$

Практическое занятие №22

Тема: **Решение линейных дифференциальных уравнений первого и второго порядка**

Цель работы: научиться решать линейные дифференциальные уравнения первого порядка и второго порядка

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант №1

1. Найдите общее решение:
   a. $y' - \dfrac{y}{x} = x$
   b. $y' - 2y' - 3y = 0$
   c. $y' - 2y' + y = 0$
   d. $y' - 2y' + 50y = 0$
2. Найдите частное решение:
   a. $y' - 3y - 2 = 0$; y(0)=0
   b. $y' - 4y' + 3y = 0$; y(0)=6, y'(0)=10

Вариант №2

1. Найдите общее решение:
   a. $y' - y = x$
   b. $y' - 3y' + 2y = 0$
   c. $y' - 6y' + 9y = 0$
   d. $y' - 6y' + 25y = 0$
2. Найдите частное решение:
   e. $x^{-2}y' - y + 1 = 0$; y(3)=0
   f. $y' + 4y' + 29y = 0$; y(0)=0, y'(0)=15

Вариант №3

1. Найдите общее решение:
   a. $y' - 3y - 2 = 0$

   b. $y'' - 7y' + 6y = 0$

   c. $y'' - 4y' + 4y = 0$

   d. $y'' + 2y' + 5y = 0$

2. Найдите частное решение:
   a. $y' - x + \dfrac{3y}{x} = 0$; y(1)=5

   b. $4y'' + 4y' + y = 0$; y(0)=2, y'(0)=0

Вариант №4

1. Найдите общее решение:
   a. $y' = y + 5$

   b. $y'' - 2y' - y = 0$

   g. $y'' - 10y' + 25y = 0$

   h. $4y'' - 8y' + 5y = 0$

2. Найдите частное решение:
   a. $y' - \dfrac{y}{x} = x$; y(1)=4

   b. $y'' - 2y' = 0$; y(0)=2, y'(0)=2

Вариант №5

1. Найдите общее решение:
   a. $xy' - x^2 + 3y = 0$

   b. $3y'' - 2y' - 8y = 0$

   c. $4y'' - 4y' + y = 0$

   d. $y'' + 4y' + 29y = 0$

2. Найдите частное решение:
   a. $y' - \dfrac{3y}{x+1} = (x+1)^3$; y(1)=2

   b. $y'' - 2y' + 10y = 0$; y(0)=1, y'(0)=3,1

Вариант №6

1. Найдите общее решение:
   a. $y' - x^2 y + x^2 = 0$

b. b. $y' + y' - 2y = 0$

c. $9y' - 6y' + y = 0$

d. $y' + 6y' + 13y = 0$

2. Найдите частное решение:
   a. $\cos xy' + y\sin x = 1$; y(0)=1

   b. $4y' + 16y' + 15y = 0$; y(0)=3, y'(0)=-5,5

Практическое занятие №23

Тема: **Исследование рядов на сходимость**

Цель работы: научиться исследовать ряды на сходимость

Краткие теоретические сведения

Определение 1. *Числовым рядом* называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \;. \qquad (1)$$

Определение 2. Числа $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$называются *членами ряда* (1); a_n называется *общим членом ряда.*

Индекс n принимает значения n = 1, 2,3…, иногда общий член удобнее записывать так, чтобы индекс n принимал значения n = 0, 1, 2,…

Определение 3. Сумма первых n членов ряда называется *частичной суммой ряда.*

Обозначение: $S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ \ S_n,\ \ldots,$

Теорема 1 (*Необходимое условие сходимости ряда*). Если ряд (2) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Следствие. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится

Теорема 2 (*первый признак сравнения*)

Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + \ a_n + \ldots \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots + \ b_n + \ldots \geq 0 \qquad (2)$$

Если $b_n \leq a_n$ *для любого n , то из сходимости ряда* (1) *следует сходимость ряда* (2) *и сумма ряда* (2) *не превосходит сумму ряда* (1); *из расходимости ряда* (2) *следует расходимость ряда* (1).

Теорема 3 (*второй признак сравнения*)

Пусть даны два ряда с положительными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots + a_n + \ldots \geq 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots + b_n + \ldots \geq 0 \qquad (2)$$

И пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K > 0$

Тогда оба ряда либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$. Известно, что гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Вычислим предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K$.

Подставим вместо $a_n = \frac{1}{n}$, а вместо $b_n = \frac{1}{2n-1}$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}(2 - \frac{1}{n}) = 2 > 0$.

Получили конечный предел, согласно теореме3 оба ряда расходятся одновременно.

Теорема 4. (*признак Даламбера*) Пусть дан ряд (1) с положительными членами. Допустим, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$.

Тогда:

1) *если* $\rho < 1$, *то ряд* (1) *сходится;*
2) *если* $\rho > 1$, *то ряд* (1) *расходится;*
3) *если* $\rho = 1$, *то следует воспользоваться другим признаком сходимости.*

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(n+1)}{2^{n+1} * n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, данный ряд сходится по признаку Даламбера.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10 \cdot n^{100}} = \frac{2}{10} + \frac{2^2}{10 \cdot 2^{100}} + \frac{2^3}{10 \cdot 3^{100}} + \ldots + \frac{1}{10 \cdot n^{100}} + \ldots$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{10(n+1)^{100}} \div \frac{2^n}{10\cdot n^{100}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot 10\cdot n^{100}}{2^n\cdot 10\cdot (n+1)^{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot n^{100}}{(n+1)^{100}} =$$

$$2\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^{100} = \quad = 2\cdot 1^{100} = 2 > 1.$$

Следовательно, данный ряд расходится по признаку Даламбера.

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{2n^2+1}{3n^2-2};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots;$$

3.Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4.Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{1+n^2}$

Вариант 2

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{2n-1}{\sqrt{n^3+3}};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots;$$

3.Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4.Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{(2+n)n}$

Вариант 3

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n=\frac{n^2+n-17}{3n^2+5n+10};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots;$$

3. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4. Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$

Вариант 4

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n=\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots;$$

3. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4. Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$

Вариант 5

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n=\frac{2^n}{n(n+1)};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots;$$

3. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)}{n!}$

3.1 Найти частичную сумму S_3;

3.2 Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4. Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$

Вариант 6

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{(2n)!}{n^n};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 13} \ldots;$$

3. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4. Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 5}$

Вариант 7

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{(n+1)^n};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{2}{15} + \frac{6}{75} + \frac{12}{375} + \frac{20}{1875} + \ldots$$

3. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4. Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

Вариант 8

1. Написать четыре члена ряда по заданному общему члену a_n

$$a_n = \frac{n}{3^n(n+1)};$$

2. Написать формулу общего члена ряда

$$\frac{1}{1\cdot 7} + \frac{1}{3\cdot 9} + \frac{1}{5\cdot 11} + \frac{1}{7\cdot 13} + \ldots$$

3. Дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{3^n \cdot n!}$

Найти частичную сумму S_3;

Исследовать на сходимость ряд при помощи признака Даламбера;

4. Доказать сходимость ряда при помощи признаков сравнения $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$

Практическое занятие №24

Тема: **Разложение функций в ряды Тейлора и Маклорена**

Цель работы: знать формулы разложения функции в ряд Тейлора или Маклорена, уметь записывать разложение функции в ряд

Краткие теоретические сведения

Определение 1. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

называется *функциональным рядом.*

Определение 2. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots,$$

где x — независимая переменная, x_0 — фиксированное число, a_0, a_1, a_2, …, a_n, …— постоянные коэффициенты, вычисляемые по формулам:

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = \frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!},\ \ldots \quad .$$

Разложение функции в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

1. Разложить функцию $f(x)=e^{2x}$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2. Разложить функцию $y=\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=\ln(1+e^x)$ в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение третьей производной от функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ при $x=0$.

Вариант 2

1. Разложить функцию $f(X)=e^{-x^2}$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2.Разложить функцию $y=\sqrt{x^3}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=e^{cosx}$ в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение третьей производной от функции $y=x^2\cdot\sqrt[4]{1+x}$ при x=0.

Вариант 3

1. Разложить функцию $y=\sqrt{1+x^2}$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2.Разложить функцию $f(x)=e^{2x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=-\ln\cos x$ в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение шестой производной от функции $y=x^6\cdot e^x$ при x=0.

Вариант 4

1. Разложить функцию $y=\ln(10+x)$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2.Разложить функцию $f(X)=\sqrt{x^5}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=\ln(2+e^x)$ в в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение пятой производной от функции $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ при x=0.

Вариант 5

1. Разложить функцию $y=e^{3x}$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2.Разложить функцию $f(X)=\sin\dfrac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=cos^2x$ в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение четвертой производной от функции $y=x^2\cdot\sqrt[4]{1+x}$ при x=0.

Вариант 6

1. Разложить функцию $y=\sin^2 x$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2.Разложить функцию $f(X)=\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=2$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=\ln(2-e^x)$ в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение четвертой производной от функции $y=x^6\cdot e^x$ при x=0.

Вариант 7

1. Разложить функцию $y=\sin\dfrac{x}{2}$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2.Разложить функцию $f(X)=\dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=3$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y=(1+x)^2$ в окрестности точки $x_0=0$.
4. Найти значение третьей производной от функции $y = x\cdot\sqrt{1+x}$ при x=0.

Вариант 8

1. Разложить функцию $y=\sqrt{1+x^2}$ в ряд Маклорена в окрестности точки $x_0=0$.

2. Разложить функцию $f(X)=e^{3x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=1$.

3. Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y = x\ln(1+x)$ в в окрестности точки $x_0=0$.

4. Найти значение третьей производной от функции $y = x\cdot\sqrt[4]{1+x}$ при x=0.

Практическое занятие №25

Тема: **Вычисление абсолютной и относительной погрешностей приближенного числа**

Цель работы: приобретение новых знаний по вопросам теории погрешностей с целью применения в процессе обучения, в дальнейшей профессиональной деятельности, а также в повседневной жизни.

Краткие теоретические сведения

Определение 1. Под приближенным числом **a** понимают число, незначительно отличающееся от точного числа **A** и заменяющее его в вычислениях.

Классификация погрешностей:

— *неустранимая погрешность* (суммарная погрешность математической модели и исходных данных);
— *погрешность аппроксимации (метода)*, т.е. получение точного решения математической задачи, как правило, неосуществимо;
— *вычислительная погрешность (погрешность округлений)*. Поэтому при постановке задачи часто задают требуемую точность решения.

Любое десятичное положительное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной дроби

$$\boxed{x = \alpha_1\cdot 10^m + \alpha_2\cdot 10^{m-1} + \ldots\ldots + \alpha_n\cdot 10^{m-n+1} + \ldots} \qquad (1)$$

где α_i – цифры числа (i=1,2,3,….n….), m – старший десятичный разряд

Каждая единица соответствующего i-ого разряда имеет свое значение 10^{m-i+1} называемое *ценой разряда*.

В практике вычислений часто возникает необходимость в *округлении записи числа*, т.е. замене его другим числом с меньшим количеством цифр.

Правила округления:

1. Если отбрасываемые числа составляют число, большее половины единицы последнего оставляемого разряда, то оставляемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемые цифры составляют число, меньшее половины единицы последнего оставляемого разряда, то оставляемая цифра не изменяется.
2. Если отбрасываемые числа составляют число, равное половине единицы последнего оставляемого разряда, то последняя оставляемая цифра увеличивается на единицу, если она нечетная, и остается без изменения, если она четная.

Пример. Округлить следующие числа до трех цифр.

A_1=12,7852 12,8

A_2=394,261 394

A_3=6,265001 6,27

A_4=147,5 148

A_5=148,5 148

Определение 2. *Абсолютной погрешностью* приближенного числа a называется величина, удовлетворяющая неравенству $\boxed{\Delta \ge |A-a|\ .}$

Можно записать $A = a \pm \Delta$. Часто применяют выражения типа: «с точностью до 0,01», «с точностью до 0,1». Это означает, что абсолютная погрешность соответственно равна 0,01 и 0,1. Абсолютная погрешность отражает лишь количественную сторону погрешности. Для того, чтобы оценить качественную сторону погрешности вводят понятие относительной погрешности.

Определение 3. *Относительной погрешностью* приближенного числа a называется величина, удовлетворяющая неравенству $\boxed{\delta \ge \left|\frac{A-a}{a}\right|}$ или $\boxed{\delta = \frac{\Delta}{|a|}}$

Относительная погрешность безразмерная величина, ее часто принято выражать в процентах.

Пример. Определить абсолютную и относительную погрешности приближенного числа $a = 35{,}148 \pm 0{,}00074$.

Здесь абсолютная погрешность Δ=0,00074. Относительная погрешность вычисляем по формуле $\delta = \frac{0{,}00074}{35{,}148} = 0{,}000022 \approx 0{,}002\%$.

3. **Определение 4.** *Значащими цифрами* числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящие левее первой отличной от нуля цифры. Нули в конце числа всегда значащие цифры (в противном случае их не пишут).

Пример. Числа 0, 001604 и 30, 500 имеют соответственно 4 и 5 значащих цифр.

Если хотим показать, что у числа 400 000 последние три нуля не являются значащими цифрами, то данное число следует записать в *нормализованной* форме, т.е. $400 \cdot 10^3$ или $40{,}0 \cdot 10^4$. 400 – это мантисса числа, а 3 – порядок числа.

Для закрепления теоретического материала и получения прочных знаний решить примеры

Вариант 1

1) Выполнить последовательные округления числа:
   2,75464
2) Округляя число до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ (в процентах) погрешности полученных приближений:
   1,1426
3) Определить абсолютную погрешность Δ приближенного числа по его относительной погрешности δ:
   X=2,52; δ=0,7%
4) Определить количество верных значащих цифр для приближенного числа:
   $39{,}285 \pm 0{,}034$
5) Определить какое из равенств точнее (у к а з а н и е. Предварительно найти относительные погрешности. Более точным является то равенство, относительная погрешность которого меньше):

$\frac{6}{25} \approx 1{,}4$ или $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

Вариант 2

1) Выполнить последовательные округления числа:
   3,14159
2) Округляя число до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ (в процентах) погрешности полученных приближений:
   0,01015
3) Определить абсолютную погрешность Δ приближенного числа по его относительной погрешности δ:
   X=0,986; δ=10%
4) Определить количество верных значащих цифр для приближенного числа:
   a. $1{,}2785 \pm 0{,}0007$
5) Определить какое из равенств точнее (у к а з а н и е. Предварительно найти относительные погрешности. Более точным является то равенство, относительная погрешность которого меньше):
   $\frac{1}{95} \approx 0{,}1$ или $\frac{1}{3} \approx 0{,}333$

Вариант 3

1) Выполнить последовательные округления следующего числа: 0,56453
2) Округляя число до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ (в процентах) погрешности полученных приближений:
   0,1245
3) Определить абсолютную погрешность Δ приближенного числа по его относительной погрешности δ:
   X=46,75; δ=1%
4) Определить количество верных значащих цифр для приближенного числа:
   $183{,}3 \pm 0{,}1$
5) Определить какое из равенств точнее (у к а з а н и е. Предварительно найти относительные погрешности. Более точным является то равенство, относительная погрешность которого меньше):
   $\frac{15}{7} \approx 2{,}14$ или $\frac{1}{9} \approx 0{,}11$

Вариант 4

1) Выполнить последовательные округления числа: 4,1945
2) Округляя число до трех значащих цифр, определить абсолютную Δ и относительную δ (в процентах) погрешности полученных приближений:
   921,55
3) Определить абсолютную погрешность Δ приближенного числа по его относительной погрешности δ:
   X=199,1; δ=0,01
4) Определить количество верных значащих цифр для приближенного числа:
   $0{,}056 \pm 0{,}0003$

Практическая работа № 26

Тема: **«ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ»**

Цель работы: познакомить студентов с комплексными числами, научить выполнять действия с комплексными числами в алгебраической и геометрической формах.

Краткие теоретические сведения

Свойства векторного произведения векторов

1) $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$;
2) $\vec{a}\times\vec{b}=0$, если $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ или $\vec{a}=0$ или $\vec{b}=0$;
3) $(m\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(m\vec{b})=m(\vec{a}\times\vec{b})$; $m\in R$
4) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$;
5) Если заданы векторы $\vec{a}\,(x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\,(x_b, y_b, z_b)$ в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_a & y_a & z_a\\ x_b & y_b & z_b\end{vmatrix}$$

6) Геометрическим смысл: модуль векторного произведения векторов равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Свойства смешанного произведения

1) Смешанное произведение равно нулю, если:
   а) хоть один из векторов равен нулю;
   б) два из векторов коллинеарны;
   в) векторы компланарны.
2) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$
3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$
4) $(\lambda\vec{a}_1+\mu\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})=\lambda(\vec{a}_1,\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{a}_2,\vec{b},\vec{c})$
5) Объем треугольной пирамиды (тетраэдра), образованной векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, равен

$$V_{тетр}=\frac{1}{6}\left|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\right|$$

6) Если $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}$$

Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор, равный векторному произведению векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Обозначается $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ или $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$ по модулю равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Задание:

1. Даны векторы *a, b, c*. Найти:
а) длины этих векторов;
б) скалярное произведение векторов *a* и *b* и косинус угла между ними;
в) векторное произведение *a*×*b* и площадь треугольника, построенного на этих векторах;
г) смешанное произведение *abc* и объём тетраэдра, построенного на этих векторах.

1 вариант

1. ***a***(3,4,1), ***b***(4,-1, 3), ***c***(1,4,-5)
2. ***a***(5,-1,0), ***b***(1,2,4), ***c***(3,2,1)
3. ***a***(-4,2,5), ***b***(6,0,-1), ***c***(3,2,1)
4. ***a***(7,3,1), ***b*** (1,5,3), ***c***(-1,4,0)

2 вариант

1. ***a*** (7,2,1), ***b***(4,-2,7), ***c***(1,3,0)
2. ***a***(8,5,6), ***b***(-1, 2 -2), ***c***(4,7,0)
3. ***a***(5,3,-2), ***b***(3,2,4), ***c***(1,0,5)
4. ***a***(-7,2,6), ***b***(2,4,1), ***c***(1,4,8)

2. Определить взаимное расположение кривой второго порядка *f(x,y)=0* и прямой *Ax+By+C=0*, построить их на плоскости.

1 вариант

1. $x^2+4y^2-12x-16y+36=0$, $x+2y-6=0$
2. $x^2+8x-4y^2+32y-52=0$, $x=-2$

2 вариант

1. $y^2-4y-x+5=0$, $x+y=5$
2. $4x^2-48x+y^2-4y+132=0$, $y=10-2x$

3. Даны точки A, B, C, D. Требуется:
а) написать уравнения прямой (CD), плоскости ABC;
б) найти расстояние от точки D до плоскости ABC;
в) найти точку пересечения прямой *l* с плоскостью ABC;

1 вариант

1. A(1,2,3), B(0,7,0), C(3,1,3), D(5,6,-2), $l: \frac{x-2}{-1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z=1}{4}$
2. A(1,2,-3), B(0,-5,2), C(5,0,5), D(1,2,7) $l: \frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{5}$

2 вариант

1. A(0,-1,3), B(1,-3,2), C(-1,-6,1) D(2,7,5), $l: \frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-3}=\frac{z-2}{0}$
2. A(2,0,1), B(0,4,1), C(3,2,-1), D(7,8,5), $l: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{2}$

Задание 4

Проверить, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис, и разложить вектор $\overline{x}$ по этому базису

	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{x}$
1	(2; 3; 1)	(1; 1; 0)	(-1; -2; 1)	(2; 0; -4)
2	(2; 2; -1)	(2; -1; 2)	(-1; 2; 2)	(0; 27; 18)

Проверить, что векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ образуют базис, и разложить вектор $\overline{x}$ по этому базису

	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}$	$\overline{x}$
1	(1; 4; 7)	(2; 5; 8)	(3; 6; 10)	(3; 0; 6)
2	(3; 2; 5)	(4; 3; 2)	(1; 1; 2)	(10; -5; 0)

5.Перечень рекомендуемых источников
(в том числе Интернет-ресурсы)

Основные источники:

1. Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. Организаций : базовый и углубленный уровни / Л.С. Атанасян и др. – 4-е изд. – М. : Просвещение, 2017. – 255 с.
2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11кл. : учеб. для ОУ (базовый уровень) в 2-х ч. Ч.1 /А.Г. Мордкович.- 12-е изд., доп.- М.: Мнемозина, 2013.- 400 с.
3. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11кл. : учеб. для ОУ (базовый уровень) в 2-х ч. Ч.2: задачник / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича.- 12-е изд., испр. и доп.- М.: Мнемозина, 2013.- 271с.

Дополнительные источники:

4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013.
5. Богомолов Н.В. Математика: учебник. М.: Юрайт, 2013
6. Конте А.С. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. Диктанты /А.С. Конте - Волгоград: Учитель, 2015.- 65 с.
7. Милованов Н.Ю. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. Задания на готовых чертежах / Н.Ю. Милованов. - Волгоград: Учитель, 2016. – 153 с.
8. Панишева О.В. Математика в стихах. 5-11 класс. Задачи, сказки, рифмованные правила / О.В. Панишева.- Волгоград: Учитель, 2014. – 212 с.

Интернет-ресурсы:

9. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru
10. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://window.edu.ru/window/library
11. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.fipi.ru
12. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://fcior.edu.ru
13. Полный курс для подготовки к ЕГЭ по математике ege-study.ru