Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский автотранспортный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ВНЕАУДИТОРНОЙ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

По предмету

ЕН.03. Теория вероятности и математическая статистика

(код и наименование УД или МДК)

по специальности :

09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

(код и наименование специальности)

2017 г.

Одобрено на заседании
цикловой комиссии
информационно-математических
дисциплин.
Протокол №____ от «__» ________20___г.
Председатель комиссии
______________________И. Г. Наговицын

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора
______________М.Г. Целищева
«___» ___________ 20___г.

Организация-разработчик: ГБПОУ КАТК

Составитель: Воронцова И. Б.

СОДЕРЖАНИЕ

1 Паспорт заданий для внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по предмету ЕН.03. ТВиМС

Согласно федеральным профессиональным образовательным стандартам среднего профессионального образования: «При формировании ППССЗ образовательное учреждение обязано обеспечивать эффективную самостоятельную работу обучающихся в сочетании с совершенствованием управления ею со стороны преподавателей и мастеров производственного обучения…»

Данные методические указания составлены в соответствии с содержанием рабочей программы ЕН.03. ТВиМС 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Предмет ЕН.03. ТВиМС изучается в течение 2 семестров. Общий объем времени, отведенный на выполнение самостоятельной работы по ЕН.03. ТВиМС, составляет в соответствии с учебным планом и рабочей программой – 39 часа

Методические указания призваны помочь обучающимся правильно организовать самостоятельную работу и рационально использовать свое время при овладении содержанием ЕН.01 ЭВМ, закреплении теоретических знаний и умений.

Внеаудиторная самостоятельная работа направлена на освоение обучающимися следующих результатов обучения согласно ФГОС профессии/специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям) и требованиям рабочей программы ЕН.03. ТВиМС относящихся к МДК

Цель проведения внеаудиторной самостоятельной работы состоит:

1. в создании дополнительных условий для освоения общих и профессиональных компетенций;
2. в формировании теоретических знаний и практических умений в соответствии с требованиями рабочей программы дисциплины;
3. в углублении и расширении теоретических знаний;
4. в формировании практического опыта и практических умений в работе со справочной и специальной литературой, в поиске и отборе информации из различных источников;
5. в развитии познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
6. в формировании самостоятельности мышления;
7. в развитии исследовательских умений.

2 Распределение часов на выполнение внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по разделам

Цель проведения внеаудиторной самостоятельной работы состоит **ЕН.03. ТВиМС 39** часов

Наименование раздела	Количество часов на ВСР
Тема 1.Элементы комбинаторики	8
Тема 2.Основы теории вероятностей	8
Тема 3.Дискретные случайные величины (ДСВ)	10
Тема 4.Непрерывные случайные величины (далее - НСВ)	6
Тема 5.Математическая статистика	7
Итого	**39**

На выполнение каждой работы выделяется время для самостоятельного изучения теоретического материала (учебник Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О.Смерчинская, В.В. Соколов., Васильев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для СПО / А. А. Васильев.) с разбором типовых заданий и самостоятельной работы согласно плана рабочей программы.

3 Виды внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по предмету ЕН.03 ТВиМС

Видами заданий для внеаудиторной самостоятельной работы могут быть:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника-первоисточника, дополнительной литературы); составление плана текста; графическое изображение структуры текста; конспектирование текста; выписки из текста; работа со словарями и справочниками; ознакомление с нормативными документами; учебно - исследовательская работа; использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета и др.;

- для закрепления и систематизации знаний: работа с конспектом лекции (обработка текста); повторная работа над учебным материалом (учебника, первоисточника, дополнительной литературы, аудио- и видеозаписей); составление плана и тезисов ответа; составление таблиц для систематизации учебного материала; изучение нормативных материалов; ответы на контрольные вопросы; аналитическая обработка текста (аннотирование, рецензирование, реферирование, контент – анализ и др.); подготовка сообщений к выступлению на семинаре, конференции; подготовка рефератов, докладов; составление библиографии, тематических кроссвордов; тестирование и др.;

- для формирования умений: решение задач и упражнений по образцу; решение вариативных задач и упражнений; выполнение чертежей, схем; выполнение расчетно-графических работ; решение ситуационных производственных (профессиональных) задач; подготовка к деловым играм; проектирование и моделирование разных видов и компонентов профессиональной деятельности; подготовка курсовых и дипломных работ (проектов); экспериментально - конструкторская работа; опытно - экспериментальная работа; упражнения на тренажере; упражнения спортивно - оздоровительного характера; рефлексивный анализ 4 профессиональных умений с использованием аудио- и видеотехники и др.

Виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы, их содержание и характер могут иметь вариативный и дифференцированный характер, учитывать специфику специальности, изучаемой дисциплины, индивидуальные особенности студента.

Можно предложить следующие виды самостоятельной работы студентов по математике:

- решение заданий по образцу;
- опережающие домашние задания;
- выполнение заданий по алгоритму;
- типовые расчеты;
- решение экзаменационных вариантов, в том числе ЕГЭ;
- составление алгоритмов для типовых заданий;
- составление и решение самостоятельно составленных заданий;
- выполнение расчетно-графических работ;
- составление и заполнение таблиц для систематизации учебного материала;
- составление теста и эталона к нему;
- ответы на контрольные вопросы;
- составление или решение математического кроссворда на математические понятия, определения и т.п.;
- творческие работы (реферат, доклад, сообщение, сочинение);
- изготовление геометрических фигур;
- разработка проекта, включающего элементы самостоятельного исследования и направленного на поиск новых методов решения поставленных задач (например, «Математика в моей профессии»).

4 Общие рекомендации обучающимся по выполнению внеаудиторных самостоятельных работ

ВСР нужно выполнять в отдельной тетради в клетку, чернилами черного или синего цвета. Необходимо оставлять поля шириной 5 клеточек для замечаний преподавателя.

Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи.

Оформление решения задачи следует завершать словом «Ответ».

После получения проверенной преподавателем работы студент должен в этой же тетради исправить все отмеченные ошибки и недочеты. Вносить исправления в сам текст работы после ее проверки запрещается.

Оценивание индивидуальных образовательных достижений по результатам выполнения ВСР производится в соответствии с универсальной шкалой (таблица).

Критерии оценки внеаудиторной самостоятельной работы студентов

Качество выполнения внеаудиторной самостоятельной работы студентов оценивается посредством текущего контроля самостоятельной работы студентов.

Текущий контроль – это форма планомерного контроля качества и объема приобретаемых студентом компетенций в процессе изучения дисциплины, проводится на практических и семинарских занятиях и во время консультаций преподавателя.

Максимальное количество баллов **«отлично»** студент получает, если:

обстоятельно с достаточной полнотой излагает соответствующую тему;

дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;

может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку **«хорошо»** студент получает, если:

неполно, но правильно изложено задание;

при изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки, которые он исправляет после замечания преподавателя;

дает правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;

может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;

правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя, имеющие целью выяснить степень понимания студентом данного материала.

Оценку **«удовлетворительно»** студент получает, если:

неполно, но правильно изложено задание;

при изложении была допущена 1 существенная ошибка;

знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировке понятий;

излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;

затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Оценка **«неудовлетворительно»** студент получает, если:

неполно изложено задание;

при изложении были допущены существенные ошибки, т.е. если оно не удовлетворяет требованиям, установленным преподавателем к данному виду работы.

Название	Кол-во часов
Самостоятельная работа №1 Расчет количества выборок заданного типа в заданных условиях; подготовка сообщения «Применение комбинаторики в различных областях науки»	2
Самостоятельная работа №2 Расчет количества выборок заданного типа в заданных условиях	2
Самостоятельная работа №3 Подготовка сообщения «Возникновение теории вероятностей»	2
Самостоятельная работа №4 Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности	1
Самостоятельная работа №5 Нахождение условных вероятностей. Вычисление вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей	1
Самостоятельная работа №6 Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности	1
Самостоятельная работа №7 Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса; подготовка сообщения «Практические приложения теории вероятностей»	1
Самостоятельная работа №8 Подготовка сообщения «Династия Бернулли»	2
Самостоятельная работа №9 Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формулы Бернулли	2
Самостоятельная работа №10 Запись распределения ДСВ, заданной содержательным образом	3
Самостоятельная работа №11 Запись распределения функции от одной ДСВ и функции от двух независимых ДСВ	3

Самостоятельная работа №12 Вычисление характеристик ДСВ, заданной своим распределением, вычисление (с помощью свойств) характеристик для функций от одной или нескольких ДСВ	2
Самостоятельная работа №13 Вычисление вероятностей для равномерно распределенной НСВ и для случайной точки, равномерно распределенной в плоской фигуре	3
Самостоятельная работа №14 Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности	2
Самостоятельная работа №15 Вычисление вероятностей для нормально распределенной величины	2
Самостоятельная работа №16 Подготовка сообщения «Возникновение математической статистики»	1
Самостоятельная работа №17 Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчет по заданной выборке ее числовых характеристик	1
Самостоятельная работа №18 Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения при известной (неизвестной)дисперсии, интервальное оценивание вероятности события	1
Самостоятельная работа №19 Подготовка сообщения «Практические приложения математической статистики»	1
Самостоятельная работа №20 Моделирование случайных величин	1
Самостоятельная работа №21 Подготовка сообщения «Моделирование случайных величин»	1
Самостоятельная работа №22 Работа в современных пакетах прикладных программ многомерного статистического анализа	1
Самостоятельная работа №23 Распознавание мостов и разделяющих вершин в графе, нахождение расстояния между вершинами в графе; проверка графа на двудольность; проверка пары графов на изоморфность	1
Самостоятельная работа №24 Подготовка сообщения «Возникновение теории графов»; «Теория графов в наши дни»	1
Самостоятельная работа №25 Подготовка сообщения «Практические применения теории графов»	1
ИТОГО	**39**
Приложение 1 Таблица значений интеграла Лапласа	
Приложение 2 Таблица значений; Таблица значений $q = q$[illegible]$, n$[illegible]	
Приложение 3 Равномерно распределенные случайные числа	

5 Задания для самостоятельной работы

Самостоятельная работа №1 Расчет количества выборок заданного типа в заданных условиях; подготовка сообщения «Применение комбинаторики в различных областях науки»

Цель: получить навыки по расчету количества выборок заданного типа в заданных условиях; получить представление о применении комбинаторики в различных областях науки

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа, работа с литературой

Форма контроля: проверка работы, сообщение на уроке

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

План:

1. Принцип умножения
2. Размещения (упорядоченные выборки).
3. Перестановки
4. Сочетания (неупорядоченные выборки)

1. Принцип умножения

Пусть необходимо выполнить одно за другим одновременно r действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе - n_2 способами и т.д. до r - того действия, которое можно выполнить n_r способами, то все r действий вместе можно выполнить $n_1, n_2 \dots n_r$ способами.

<u>Пример</u>: Сколько существует двузначных чисел?

<u>Способ</u> 1: (принцип умножения)

Выбирается две цифры, поэтому r= 2. Первая цифра может быть любой, кроме 0. Потому $n_1= 9$. Вторая цифра может быть любой, т.е. $n_2=10$. итак двузначных чисел: $n_1 n_2=9 \cdot 10=90$.

<u>Способ</u> 2. (перобора)

10 20 30 ………..90

11 21 31 …………91 прямоугольная таблица $10 \cdot 9=90$

12 22 32 …………92

………………………….

19 29 39 ………...99

<u>Пример</u>: Бросают три игральные кости и наблюдают за числом очков, появившихся на каждой кости. Сколько различных исходов опыта возможно?

<u>Решение</u>: Бросают три игральные кости, поэтому по принципу умножения r= 3, На выпавшей грани "первой" игральной кости может появиться одно очко, два очка, ... шесть очков. Поэтому $n_1= 6$. Аналогично $n_2= 6$, $n_3= 6$. Итак, число всех исходов опыта $n_1 n_2 n_3= 6 \cdot 6 \cdot 6=216$.

<u>Пример</u>: Сколько существует нечетных трехзначных чисел?

<u>Решение</u>: По принципу умножения r = 3 ; $n_1 = 9$, т.к. первая цифра может быть любой, кроме 0; $n_2 = 10$, т. к. вторая цифра может быть любой ; $n_3 = 5$, т.к. третья цифра должна быть нечетной. Итак, всех возможностей

$n_1 n_2 n_3 =9 \cdot 10 \cdot 5=450$.

<u>Замечания к принципу умножения</u>. Если на выполнение какого-либо из r действий наложено ограничение, то подсчет удобнее начинать с выполнения именно этого действия.

<u>Пример</u>: В машине 7 мест, одно место водителя. Сколькими способами могут сесть в машину 7 человек, если место водителя могут занять только трое из них?

<u>Решение</u>: По принципу умножения r = 7. Начнем с места водителя $n_1 = 3$, следующее место может занять любой из 6 оставшихся человек, т.е. $n_2 = 6$, следующее место может занять любой из 5 оставшихся человек и т.д. Поэтому $n_3 = 5$, $n_4 = 4$, $n_5 = 3$, $n_6= 2$, $n_7 = 1$.

Итак, всех возможностей: $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5 \cdot n_6 \cdot n_7 =3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2160$.

2. Размещения (упорядоченные выборки).

Пусть A – множество, состоящее из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Определение: Упорядоченные наборы, состоящие из r элементов множество A, будем называть размещениями из n элементов множества A по r элементов.

A_n^r – число размещений из n элементов по r элементов($r \le n$). Вычислим A_n^r по принципу умножения:

$n_1 = n$,

$n_2 = n-1$, $A_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$.

$n_3 = n-2$,

…………

$n_r = n-(r-1) = n-r+1$.

Здесь n, n-1, n-2,…,n-r+1 есть число возможностей для выбора первого, второго, третьего, … r – того элементов.

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots 2\cdot 1}{(n-r)\ldots 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!},$$

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

3. Перестановки

Определение: Размещения из n элементов по n элементов называются перестановки из n элементов.

P_n – число перестановок из n элементов.

$$P_n = A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \qquad P_n = n!$$

Пример: Сколькими способами могут 4 человека разместиться в 4-х местном купе железнодорожного вагона?

Решение: A = {1, 2, 3, 4} (4 места в купе вагона);

$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

4. Сочетания (неупорядоченные выборки)

$A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$

Определение: Неупорядоченные наборы, состоящие из r элементов множества A, называются сочетаниями из n элементов по r элементов. ($r \le n$).

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}, \quad \text{или} \quad C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Пример: Студенту необходимо сдать 4 экзамена за 10 дней. Сколькими способами можно составить ему расписание, если в один день нельзя сдать более одного экзамена?

Решение: A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (10 дней). Поскольку в расписании учитывается порядок экзаменов, то мы имеем дело с упорядоченными выборками, т.е. с размещениями.

Пример: Подрядчику нужны 4 плотника, к нему с предложениями своих услуг обратилось 10 человек. Сколькими способами можно набрать рабочую силу?

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} (плотники).

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210.$$

Пример. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 10 команд. Известно, что те, кто займет первые 3 места, получают золотую, серебряную и бронзовую медали, а последние двое выбывают. Сколько различных результатов первенства может быть?

Решение: Нужно выполнить одно за другими два действия:

I. Из десяти команд выбрать три на три первых места.

II. После выполнения первого действия из оставшихся семи команд выбрать две на два последних места.

Итак, по принципу умножения r = 2 ;

$n_1 = A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720$; $n_2 = C_7^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$.

Различных результатов первенства может быть:

$n_1 n_2 = 720 \cdot 21 = 15120$.

Варианты заданий

Решить комбинаторные уравнения

1. $\frac{C_{2n-1}^{n}}{C_{2n}^{n-1}} = \frac{9}{17}$
2. $C_n^3 = \frac{1}{5} C_{n+2}^4$
3. $\frac{P_{2n}}{P_{2n-1}} = \frac{2P_n}{2P_{n-2}}$
4. $\frac{A_n^7}{C_{15}^5} = 1920$
5. $A_n^5 = 18 A_{n-2}^4$
6. $2C_{n+2}^{n-2} = A_n^2$

<u>Самостоятельная работа №2 Расчет количества выборок заданного типа в заданных условиях</u>

Цель: получить навыки по расчету количества выборок заданного типа в заданных условиях

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Задачи на расчет количества выборок

На использование формул для перестановок и размещений

Сколько слов можно образовать из букв слова фрагмент, если слова должны состоять: (а) из восьми букв, (б) из семи букв, (в) из трех букв?

Решение задачи:

В слове фрагмент 8 букв алфавита.

(а) Всевозможные перестановки 8 букв по восьми местам: Aµ § = µ §=P8.

(б) Размещения 8 букв по 7 местам: Aµ §.

(в) Размещения 8 букв по 3 местам: Aµ §.

Ответ: P8, Aµ §, Aµ §.

Сколькими способами можно расставить на полке 7 книг, если (а) две определенные книги должны всегда стоять рядом, (б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение задачи:

(а) Книги, которые должны стоять рядом, считаем за одну книгу. Тогда нужно расставить 6 книг по шести местам. Применяя формулу перестановок, получаем: P6 = 6!. Мы учли перестановки шести книг, не учитывая порядок внутри тех книг, которые мы посчитали за

одну. А так как две книги по двум местам можно разместить только двумя способами (P2), то получаем окончательно следующее произведение: P2µ §P6 =2 µ §6! = 1440.
(б) Способов переставить 7 книг существует P7= 7!. Из них - 2µ §6! способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли вместе существует: 7! - 2µ §6!.
Ответ: 1440; . 7! - 2µ §6!

На использование формул для сочетаний
Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?
Решение задачи:
Для решения этой задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т.к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборке. Запишем формулу для сочетаний и произведем вычисления:
Cµ § = µ §.
Ответ: 56.

Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую — пять и в третью — двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)
Решение задачи:
Из 20-ти элементов необходимо сделать три выборки, причем порядок внутри выборок значения не имеет. Поэтому используем формулу для сочетаний. Чтобы выбрать из 20-ти элементов 3, существует Cµ § способов. Остается 17 элементов, из которых выбирается 5 элементов - Cµ § способами. Остается 12 элементов, из которых выбирается 12 элементов. Это можно сделать Cµ §= 1, т.е. одним способом. Используя принцип произведения, получаем: Cµ §µ § Cµ §µ § Cµ §.
Ответ: Cµ §µ § Cµ §µ § Cµ §.
На использование формул для перестановок и сочетаний

Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова сапфир? 2) Сколько среди них таких, которые не содержат буквы р? 3) Сколько таких, которые начинаются с буквы с и оканчиваются буквой р?
Решение задачи:
1. Из шести букв составляются четырехбуквенные слова, причем порядок букв важен для образования новых слов. Поэтому используется формула для размещений: Aµ §.
2. Необходимо исключить букву р из рассмотрения. Количество слов, не содержащих эту букву: Aµ §.
3. На первое место поставить букву с можно только одним способом. На последнее место поставить букву р можно тоже только одним способом. Остаются 4 буквы, которые необходимо разместить по двум местам: Aµ §.
Ответ: 360, 120, 12.

Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно. образовать из букв слова уравнение?
Решение задачи:
В слове уравнение 3 согласных и 4 гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество сочетаний 3 согласных из 3-х заданных и двух гласных из четырех заданных: Cµ § и Cµ §. После того, как 5 букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв: Cµ §µ §Cµ §µ §P5.
Ответ: Cµ §µ §Cµ §µ §P5.

Варианты заданий
Задача 1. Сколькими различными маршрутами можно разнести корреспонденцию в пять адресов. (Маршрут определяется последовательностью адресатов)?
Задача 2. Цифры 0,1,2,3 написаны на четырех разноцветных карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно сложить из этих карточек?
Замечание. Первая цифра числа не может быть нулем. Карточку можно использовать в числе только один раз.
Задача 3. В хоккейном турнире участвуют 6 команд. Каждая команда должна сыграет с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?
Задача 4. Из трех классов спортивной школы нужно составить команду для соревнований, взяв по одному ученику от класса. Сколько различных команд можно составить, если в одном классе учатся 18, в другом 20, в третьем 22 ученика?
Задача 5. На плоскости задано множество А, состоящее из 8 точек. Три из них выкрашены в красный цвет и лежат на одной прямой, а остальные расположены так, что проходящая через пару точек прямая не содержит других точек множества. Через каждые две точки множества А проведено по прямой линии. Сколько всего прямых линий получилось?
Задача 6. Сколькими способами можно упорядочить множество μ §так чтобы каждое четное число имело четный номер?
Задача 7. В ящике находится 20 деталей. Известно, что 5 из них являются стандартными. Из этих деталей выбирают 3. Сколько существует способов выбора трех деталей таких, чтобы среди них была, по крайней мере, одна стандартная?
Задача 8. Из 7 разноцветных карточек разрезной азбуки составлено слово колокол. Ребенок, не умеющий читать, случайно рассыпал эти карточки. Сколькими способами из этих карточек он сможет снова составить слово колокол?
Задача 9. Имеется прямоугольник, разбитый на клетки. По горизонтали n клеток, а по вертикали– m клеток. Можно двигаться только по сторонам клеток либо вправо, либо вверх. Сколько существует различных путей из левого нижнего угла в правый верхний угол?

Самостоятельная работа №3 Подготовка сообщения «Возникновение теории вероятностей»

Цель: получить представление о возникновении теории вероятностей
Самостоятельная работа: работа с литературой
Форма контроля: сообщение на уроке

Самостоятельная работа №4 Вычисление вероятностей событий по классической формуле определения вероятности

Цель: отработать навыки по вычислению вероятностей событий по классической формуле определения вероятности
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы
Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Классическое определение вероятности
Пусть некоторый опыт может приводить лишь к одному из конечного множества результатов. Эти результаты будем называть элементарными исходами. Предположим, что элементарные исходы удовлетворяют следующим условиям:

образуют полную группу, т.е. в каждом испытании обязан появиться какой-нибудь из этих исходов;
попарно несовместны, т.е. два различных элементарных исхода не могут появиться в одном испытании;
равновозможные, т.е. шансы на появление у всех элементарных исходов одинаковы.

В этих условиях может использоваться классическое определение вероятности.

Определение: Элементарные исходы, в которых появляются интересующее нас событие, называются благоприятными этому событию.

Определение: Вероятностью события А называются число Р(А), равное отношению числа исходов испытания, благоприятствующих событию А к общему числу исходов:
µ §где n – общее число исходов испытания, m – число исходов, благоприятствующих событию А.

Пример: Бросается один раз игральная кость. Какова вероятность выпадения нечетного числа очков?
Решение: Опыт состоит в бросании игральной кости 1 раз и наблюдении за числом очков, появившихся на верхней грани.
Все исходы опыта: 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Число всех исходов: n = 6.
Рассмотрим событие А – выпало нечетное число очков. Исходы благоприятствующие А: 1, 3, 5.
Число исходов, благоприятствующих А : m = 3
µ §.
Пример: Ребенок играет с шестью буквами разрезной азбуки А, В, К, М, О, С. Какова вероятность того, что при случайном расположении букв в ряд получится слово «МОСКВА»?
Решение: Опыт состоит в случайном расположении шести букв в ряд. Все исходы опыта – множество перестановок из шести различных букв.
Число всех исходов: n = P6=6! = 1.2.3.4 .5.6=720.
Рассмотрим событие А – при случайном расположении шести букв в ряд получено слово «МОСКВА». Очевидно, что такое расположение букв единственно, т.е. m=1. Найдем вероятность события А: Р(А)=µ §.
Пример: В ящике находится 20 деталей, из них 8 бракованных. Из ящика наудачу извлекают 5 деталей. Найти вероятность того, что среди них окажутся две бракованные детали.
Решение: Опыт состоит в выборе наудачу 5 деталей из 20. Все исходы опыта – множество сочетаний из 20 деталей (находящихся в ящике) по 5.
Число всех исходов опыта n=µ §=µ §
Рассмотрим событие А – среди 5 деталей, извлеченных из ящика, две бракованные.
Если среди 5 деталей две бракованные, то остальные 3 небракованные. Тогда число исходов, благоприятствующих
событию А, можно найти по принципу умножения. Нужно выполнить одно за другим два действия: из 8 бракованных выбрать 2 детали и затем из 12 небракованных выбрать 3 детали. Первое действие можно выполнить n1=µ §второе действие можно выполнить n2=µ § способами. Итак, m=n1.n2=µ § µ §.
Найдем вероятность события А:
µ §

Задачи на классическое определение вероятности
Буквой А обозначаем событие, фигурирующее в условии задачи.
Задача. Корреспонденция разносится в 5 адресов. Разносчик забыл дома очки и разнес корреспонденцию случайным образом. Какова вероятность того, что вся корреспонденция попала к своим адресатам?
Решение. Элементарным событием является перестановка из 5 адресов. Их число равно μ § По смыслу задачи все они равновероятны. Поэтому Р(А)= 1/120.

Задача. Цифры 0,1,2,3 написаны на четырех карточках. Карточки расположили в случайном порядке. Какова вероятность того, что из них сложено 4-х-значное число?
Решение. Элементарным событием является перестановка из 4 карточек. Их всего 4!. Поскольку четырехзначное число не может начинаться с нуля, то событие А состоит из тех перестановок, которые начинаются с карточки с не равной нулю цифрой. Их всего 4!-3!=18. Поэтому Р(А)= 18/4! =18/24=3/4.

Задача. В хоккейном турнире участвуют 6 равных по силе команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. У Вас есть любимая команда. Вы пришли «поболеть» на турнир на одну из игр, выбранных случайно. Какова вероятность того, что в этой игре будет играть Ваша любимая команда?
Решение. Общее число проведенных игр равно С62=15. Любимая команда участвует в 5 играх из 15. Поэтому Р(А)= 5/15 = 1/3.

Задача. В ящике разложено 20 деталей. Известно, что 5 из них являются стандартными. Рабочий случайным образом берет 3 детали. Какова вероятность того, что хотя бы одна деталь стандартная?
Решение. Элементарным событием является сочетание из 20 деталей по 3. Количество таких сочетаний равно С203. В соответствии с решением задачи 11, число сочетаний, содержащих хотя бы одну стандартную деталь равно С203- С153=685. Поэтому Р(А)= μ §
Задача. Из 7 карточек разрезной азбуки составлено слово колокол. Эти карточки рассыпали и затем собрали в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово колокол?
Решение. На карточках имеется 3 буквы о, 2 буквы к, 2 буквы л. Поэтому, первая буква слова колокол может быть выбрана двумя способами, вторая – 3 способами, третья – 2 способами. При уже выбранных первых трех буквах четвертая буква может быть выбрана еще 2 способами (поскольку одна буква о уже выбрана). Остальные буквы могут быть выбраны только одним способом. Таким образом (см. решение задачи 12), число перестановок карточек, реализующих слово колокол равно произведению чисел 3, 2, 2, 2 т.е. равен 24. Общее число перестановок карточек равно 7!.Поэтому Р(А)= μ §

Варианты заданий
Решить задачи
Из ящика, в котором 10 белых и 6 черных шаров, берут наудачу 3 шара. Какова вероятность того, что один из них белый, а два черных?
Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры, запомнив лишь, что они различные, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры?
25 экзаменационных билетов содержат по две вопроса, которые не повторяются. Студент подготовил 45 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый студентом билет состоит из подготовленных им вопросов?
В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров. Известно, что 6 из них нуждаются в общей регулировке. Мастер берет первые попавшиеся 5 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей регулировке.

Из колоды в 52 карты берется наугад 4 карты. Найти вероятность того, что среди этих 4 карт будут представлены все четыре масти.
На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди них находится трехтомник А.С.Пушкина. Некто взял наудачу с полки 5 книг. Найти вероятность того, что среди этих пяти книг есть трехтомник Пушкина.
Секретных замок содержит на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов с различными цифрами. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что образуют определенное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок откроется.

Самостоятельная работа №5 Нахождение условных вероятностей. Вычисление вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей

Цель: получить навыки по нахождению условных вероятностей; вычислению вероятностей сложных событий с помощью теорем умножения и сложения вероятностей
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Противоположное событие. Теоремы сложения, умножения вероятностей
План:
Основные определения
Теорема умножения вероятностей
Теорема сложения вероятностей несовместимых событий
Вероятность противоположного события

Основные определения

Определение: Событие, которое в результате опыта должно произойти непременно, называется достоверным событием.

Определение: Событие, которое в данном опыте не может произойти, называется невозможным.
Вероятность достоверного события равна единице, вероятность невозможного события равна нулю.

Определение: Два события называют несовместными, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

Определение: Суммой A+B двух событий A и B называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них, т. е. или событие A или B или A и B вместе.

Определение: Произведением A.B двух событий A и B называется событие, состоящее в совместном появлении события A и события B.

Определение: Противоположным к A называется событие µ §, состоящее в том, что A не произошло.

Определение: Два события называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от появления или не появления другого.

Определение: Пусть A и B – зависимые события. Условной вероятностью P(B|A) (или PA(B)) называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема умножения вероятностей

Теорема: Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий
P(A.B) = P(A).P(B).
Пример. Какова вероятность того, что при десятикратном бросании монеты герб выпадет 10 раз ?

Решение: Пусть событие Ai — появление герба при i-м бросании. Искомая вероятность есть вероятность совмещения всех событий Ai (i=1,2,3,...,10), а так как они, очевидно, независимы в совокупности, то применяя формулу (10), имеем
μ §
Но P(Ai)=1/2 для любого i; поэтому
μ §

Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предложении, что первое уже наступило.
P(A .B) = P(A).P(B(A).
Для трех зависимых событий:
P(A .B) = P(A).P(B(A).P(C(A .B).

Пример. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми ?

Решение: Эта задача уже была решена в п. 3 с помощью классического определения вероятности. Решим ее, применяя формулу (5). Извлечение двух шаров равносильно последовательному их извлечению. Обозначим через A появление белого шара при первом извлечении, а через B — при втором. Событие, состоящее в появлении двух белых шаров, является совмещением событий A и B. По формуле (5) имеем
μ §
Но P(A)=3/10; PA(B)=2/9, поскольку после того, как был вынут первый белый шар, в урне осталось 9 шаров, из которых 2 белых. Следовательно,
μ §

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий

Теорема: Вероятность суммы несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
P(A+B) = P(A)+P(B).
Пример. В урне 2 зеленых, 7 красных, 5 коричневых и 10 белых шаров. Какова вероятность появления цветного шара?
Решение: Находим соответственно вероятности появления зеленого, красного и коричневого шаров: P(зел.)=2/24; P(кр.)=7/24; P(кор.)=5/24. Так как рассматриваемые события, очевидно, несовместны, то, применяя аксиому сложения, найдем вероятность появления цветного шара:
μ §
Теорема:

Если A и B – совместные события, то
$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A .B)$.
Для трех и более совместных событий эта формула значительно усложняется.
Например:
$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A .B)-P(A .C)-P(B .C)+P(A .B .C)$.
Пример: Произведен залп из двух орудий по мишени. Вероятность попадания из первого орудия равна 0,85, а из второго – 0,91. Найти вероятность поражения цели.
Решение: Пусть событие A – хотя бы одно попадание в мишень, событие A1 – попадание в мишень из первого орудия, событие A2 – попадание в мишень из второго орудия.
Тогда A = A1+A2.
Поскольку события A1 и A2 совместны, то
P(A) = P(A1)+P(A2)-P(A1 ,A2).
Т.к. события A1 и A2 независимы, то P(A1 ,A2)=P(A1) ,P(A2),
где P(A1)=0,85, а P(A2)=0,91 по условию задачи.
Итак, P(A) =0,85+0,91-0,85, 0,91=0,9865.

Вероятность противоположного события
Несколько событий в данном опыте образуют полную группу, если в результате опыта обязательно должно появиться хотя бы одно из этих событий, Отсюда следует, что сумма событий полной группы есть достоверное событие, вероятность которого равна единице.
Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта появится одно и только одно из этих событий.
Для суммы таких событий справедлива формула
P(A1+A2+….+An) = P(A1)+P(A2)+….+P(An) = 1.

Теорема: Два противоположных друг другу события образуют полную группу:
µ §

Пример: В партии содержится 20 деталей, среди которых 4 нестандартных. Для контроля взяли наудачу 3 детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей нестандартна.
Решение: Пусть событие A – хотя бы одна из взятых деталей окажется нестандартной.
Рассмотрим событиеµ §, противоположное событию A:
µ § - среди взятых деталей нет нестандартных. Вычислим вероятность события µ §:
µ §
Теперь вычислим вероятность искомого события:
P(A) = 1-µ §.
Пример: Перегорела одна из пяти электроламп, включенных в сеть последовательно. С целью устранения повреждения наудачу выбранную лампочку заменяют годной, после чего сразу проверяется исправность линии. Если повреждение не устранено, то заменяется другая лампочка. Найти вероятность того, что повреждение будет устранено только после замены третьей лампочки.
Решение: Пусть событие A – повреждение будет исправлено после замены третьей лампы.
Рассмотрим следующие три события:
A1 – первая замененная лампа оказалась перегоревшей;
A2 – вторая замененная лампа оказалась перегоревшей;
A3 – третья замененная лампа оказалась перегоревшей.
Тогда: A = µ §
Поскольку события µ §зависимы, то µ §
Вероятность события µ § есть вероятность того, что первая замененная лампа оказалась исправнойµ §.

Условная вероятность µ § - вероятность того, что вторая замененная лампа оказалась исправной, если известно, что первая замененная лампа также исправна.
Поэтому µ §=µ §.

Наконец, условная вероятность µ § есть вероятность того, что третья замененная лампа оказалась перегоревшей, если известно, что первая и вторая замененные лампы были исправными.
Откуда µ §.
Теперь подсчитаем искомую вероятность: P(A)=µ §
Пример: Вероятности того, что деталь нужного вида находится в первом, втором, третьем ящике соответственно равны 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что деталь содержится не менее, чем в двух ящиках.
Решение: Пусть событие A – деталь нужного вида находится не менее, чем в двух ящиках.
Рассмотрим следующие три события:

A1 – деталь нужного вида имеется в 1-ом ящике;
A2 – деталь нужного вида имеется во 2-ом ящике;
A3 - деталь нужного вида имеется в 3-ем ящике.

Событие B1=µ § заключается в том, что нужного вида деталь имеется во 2-ом и 3-ем ящиках, но ее нет в 1-ом ящике. События имеется во 2-ом и 3-ем независимы, поэтому
µ §
Событие µ § заключается в том, что нужного вида деталь имеется в 1-ом и в 3-ем ящиках, но ее нет во 2-ом ящике.
Событие B3=A1 ,A2 ,µ §заключается в том, что нужного вида деталь имеется в 1-ом и 2-ом ящиках, но ее нет в 3-ем ящике.
µ §)=P(A1) ,P(A2) ,P(µ §
Наконец, событие B4=A1 ,A2 ,A3 заключается в том, что нужного вида деталь имеется и в 1-ом, и во 2-ом, и в 3-ем ящиках.
µ §
Событие A произойдет тогда, когда произойдет одно из событий:
или B1, или B2, или B3, или B4. Поэтому A=B1+B2+B3+B4.
Поскольку события B1, B2, B3, B4 несовместны, то
P(A)=P(B1)+P(B2)+P(B3)+P(B4).
Вычисляем:
P(A)=0,216+0,126+0,056+0,504=0,902.

Варианты заданий
Решить задачи

Теорема умножения вероятностей

1. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадает в мишень, равна $p = 0{,}9$. Стрелок произвел 3 выстрела. Найти вероятность того, что все 3 выстрела дали попадание. Отв. 0,729.
2. Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: "появился "герб", "появилось 6 очков". Отв. 1 / 12.
3. В двух ящиках находятся детали: в первом — 10 (из них 3 стандартных), во втором — 15 (из них 6 стандартных). Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что обе детали окажутся стандартными. Отв. 0,12.
4. В студии телевидения 3 телевизионных камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $p = 0{,}6$. Найти вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера (событие A). Отв. 0,936.

5. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей (событие А)? Отв. 91 / 216.

Теорема сложения вероятностей

1. В денежно-вещевой лотерее на каждые 10000 билетов разыгрывается 150 вещевых и 50 денежных выигрышей. Чему равна вероятность выигрыша, безразлично денежного или вещевого, для владельца одного лотерейного билета? Отв. р = 0,02.
2. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0,1; вероятность выбить 9 очков равна 0,3; вероятность выбить 8 или меньше очков равна 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очкоь. Отв. р = 0,4.
3. В партии из 10 деталей 8 стандартных. Найти вероятпость того, что среди наудачу извлеченных 2 деталей есть хотя бы одна стандартная. Отв. р = 44 / 45.
4. В ящике 10 деталей, среди которых 2 нестандартных. Найти вероятность того, что в наудачу отобранных 6 деталях окажется не более одной нестандартной детали. Отв. р = 2 / 3.
У к а з а н и е. Если А — нет ни одной нестандартной детали, В — есть одна нестандартная деталь, то
Р (А + В) = Р (А) + Р (В) = С68 / С610 + С12 * С58 / С610.

Самостоятельная работа №6 Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности

Цель: получить навыки по вычислению вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Формула полной вероятности

Пусть событие А происходит совместно с одним из событий (гипотез) Н1, Н2,… Hn, которые образуют полную группу событий. Тогда справедлива формула полной вероятности события А :
µ §,
где Р(Нк) – вероятность гипотезы Нк, Р(А(Нк) – условная вероятность А, т.е. вероятность появления события А при условии, что произошла гипотеза Нк .

Пример. Три автомата изготовляют одинаковые детали.
Известно, что первый автомат производит 30% всей продукции, второй – 25% и третий – 45%. Вероятность изготовления детали, соответствующей стандарту, на первом автомате равна 0,99, на втором – 0,988 и на третьем – 0,988. все изготовленные за смену детали складываются вместе. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.
Решение: Пусть событие А – взятая наудачу деталь не соответствует стандарту.
Гипотезы:
Н1- взятая деталь изготовлена первым автоматом;
Н2- взятая деталь изготовлена вторым автоматом;
Н3- взятая деталь изготовлена третьим автоматом.

Вычислим вероятность гипотез.
µ §
Вычислим условные вероятности:
P(A(H1) – вероятность того, что взятая наудачу деталь не соответствует стандарту, если она изготовлена первым автоматом.
µ §
Вероятность события А подсчитываем по формуле полной вероятности :
P(A)=0,3 .0,01+0,25 .0,012+0,45 .0,012=0,009.
Пример. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара. После того, как шары во второй урне перемешались, из неё выкатился шар. Найти вероятность того, что выкатившийся из второй урны шар белый.

Решение: Пусть событие H1 состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие H2 состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие H3 состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности P(H1) = µ § = 7/15, P(H2) = µ § = 1/15, P(H3) = µ § = 7/15 (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия µ §).
Если реализовалась гипотеза H1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через А событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда P(A/H1) = µ § = 5/33. Если реализовалась гипотеза H2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и P(A/H2) = µ § = 4/33. Легко показать, что P(A/H3) = µ § = 3/22. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

P(A) = (5/33)((7/15) + (4/33) (1/15) + (3/22) (7/15) = 47/330

Пример. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

Решение Обозначим через А событие, заключающееся в том, что вторая игра будет проводиться новыми мячами. Пусть гипотеза H1 состоит в том, что для первой игры были выбраны два новых мяча, гипотеза H2 состоит в том, что для первой игры были выбраны новый и играный мячи, гипотеза H3 состоит в том, что для первой игры были выбраны два играных мяча. Определим вероятности гипотез:

P(H1) = µ §; P(H2) = µ §; P(H3) = µ §.

Теперь вычислим условные вероятности события А.

P(A/H1) = µ §; P(A/H2) = µ §; P(A/H3) = µ §.

Осталось подставить результаты вычислений в формулу полной вероятности

P(A) = µ §.

Пример. На автозавод поступили двигатели от трех моторных заводов. От первого завода поступило 10 двигателей, от второго – 6 и от третьего – 4 двигателя. Вероятности безотказной работы этих двигателей в течение гарантийного срока соответственно равны 0,9; 0,8; 0,7. Какова вероятность того, что установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока?

Решение Событие А – установленный на машине двигатель будет работать без дефектов в течение гарантийного срока – может произойти, если произойдет одно из несовместных событий: µ § – установленный на машине двигатель изготовлен на первом, втором или третьем заводе соответственно. Эти события образуют полную группу, их вероятности:
µ §, µ §, µ §,

(Контроль:µ §).
По условию µ §, µ §, µ §.
По формуле полной вероятности
µ §µ §.

Варианты заданий
Решить задачи

На фирме работают сотрудники разного возраста. Молодых сотрудников – 24, среднего возраста – 82 и пожилых – 16. Вероятность того, что молодого сотрудника отправят на повышение квалификации, равна 0,52; сотрудника среднего возраста – 0,54; пожилого – 0,36. Найдите вероятность того, что выбранного наудачу сотрудника отправят повышать квалификацию.
В библиотеке имеется 21 книга по истории, 34 книги –по математике, 25 книг – по юриспруденции. Вероятность того, что книга по истории занесена в электронный каталог, равна 0,33; по математике – 0,15; по юриспруденции – 0,61. Найдите вероятность того, что выбранная наудачу книга занесена в электронный каталог.
Пассажир за получение билета может обратиться в одну из трех касс. Вероятность обращения в первую кассу составляет 0,4, во вторую – 0,35, в третью – 0,25. Вероятность того, что к моменту прихода пассажира имеющиеся в кассе билеты будут проданы, равна для первой кассы 0,3, для второй – 0,4, для третьей – 0,6. Найти вероятность того, что пассажир купит билет.

Самостоятельная работа №7 Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса; подготовка сообщения «Практические приложения теории вероятностей»

Цель: получить навыки по вычислению вероятностей сложных событий с помощью формулы полной вероятности и формулы Байеса; получить представление о практических приложениях теории вероятностей
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа, работа с литературой
Форма контроля: проверка работы, сообщение на уроке

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Формула Байеса

Пусть вероятности гипотез до опыта были $P(H1)$, $P(H2)$,… $P(Hn)$. В результате опыта появилось событие A . Тогда условная вероятность P(Hк(A) гипотезы Hк с учетом появления события A вычисляется по формуле Байеса:
µ §.

Пример.   На двух станках производят одинаковые детали, которые поступают на конвейер. Производительность первого станка в три раза больше производительности второго. Первый станок дает в среднем 80% деталей отличного качества, а второй –90%. Наудачу взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Найти вероятность того, что она изготовлена на втором станке.
Решение Пусть событие A - взятая наудачу с конвейера деталь отличного качества.
Гипотезы:
H1- деталь изготовлена на первом станке;
H2- деталь изготовлена на втором станке.
Вероятность гипотез до появления события A:

P(H1)=3/4;   P(H2)=1/4.
Условные вероятности
μ §
Вероятности того, что взятая наудачу с конвейера деталь окажется отличного качества, т.е. вероятность события А, вычисляется по формуле полной вероятности:
μ §
Искомая вероятность того, что взятая деталь отличного качества изготовлена на втором станке, вычисляется по формуле Байеса: μ §

Пример. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара и шары во второй урне перемешались, из неё выкатился белый шар. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую перекатились разноцветные шары.

Решение
Пусть событие H1 состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие H2 состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие H3 состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности P(H1) = μ § = 7/15, P(H2) = μ § = 1/15, P(H3) = μ § = 7/15 (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия μ §).
Если реализовалась гипотеза H1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через А событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда P(A/H1) = μ § = 5/33. Если реализовалась гипотеза H2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и P(A/H2) = μ § = 4/33. Легко показать, что P(A/H3) = μ § = 3/22. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

P(A) = (5/33)((7/15) + (4/33) (1/15) + (3/22) (7/15) = 47/330

Вычисления подставим в формулу Байеса

P(H3/A) = P(A/H3)P(H3)/ P(A) = (3/22)(7/15)/(47/33) = 7/47.

Пример Сообщение со спутника на землю передаётся в виде бинарного кода, то есть как упорядоченного набора нулей и единиц. Предположим, что послание на 70% состоит из нулей. Помехи приводят к тому, что только 80% нулей и единиц правильно распознаются приёмником. Если принят сигнал “1”, то какова вероятность того, что отправлен сигнал “0”?
Решение Пусть событие B0 состоит в том, что отправлен сигнал “0”, а событие B1 – в том, что отправлен сигнал “1”. Пусть событие A0 состоит в том, что принят сигнал “0”, с событие A1 – в том, что принят сигнал “1”. Нас интересует P(B0/A1). По условию

P(B0) = 0,7 P(B1) = 0,3
P(A0/ B0) = 0,8 P(A1/ B0) = 0,2
P(A1/B0) = 0,8 P(A0/ B 1) = 0,2

По формуле Байеса получаем

P(B0/A1) = 0,2(0,7/(0,2(0,7+0,8(03) = 0,37.

Пример По цели независимо сбросили две бомбы. Вероятность попадания для каждой бомбы равна 1/2. При попадании одной бомбы цель поражается с вероятность 1/2, а при попадании двух бомб она поражается с вероятностью 2/3. Найти вероятность поражения цели.
Решение. Пусть события H1, H2 и H3 состоят в попадании 0, 1 и 2 бомб соответственно. Событие A состоит в поражении цели. По формуле полной вероятности
P(A)=P(A|H1)P(H1)+ P(A|H2)P(H2)+ P(A|H3)P(H3).
P(A|H1)=0, P(A|H2)=1/2, P(A|H3)=2/3, P(H2)= ½, P(H3)=1/4.
Поэтому, P(A)= (1/2)(1/2)+(2/3)(1/4)=5/12.

Варианты заданий
Решить задачи
В магазин поступают одинаковые электрические утюги: 80% с одного завода и 20% с другого. Известно, что первый завод выпускает 90% продукции, способной прослужить гарантийный срок, а второй завод – 95%. Какова вероятность, что купленный в магазине утюг прослужит гарантийный срок?
На сборку поступают изделия трех цехов: 50 изделий из первого цеха, 40 из второго и 30 из третьего. Вероятность того, что изделие первого цеха отличного качества, равна 0,8, для второго цеха эта вероятность равна 0,9, для третьего - 0,8. Наудачу взятое сборщиком изделие оказалось отличного качества. Какова вероятность, что это изделие поступило из второго цеха?
Известно, что в партии из 600 лампочек 200 лампочек изготовлено первым заводом, 250 - вторым и 150 - третьим. Известно также, что вероятности изготовления стандартной лампочки 1-м, 2-м и 3-м заводом соответственно равны 0,97 ; 0,91 ; 0,93. Какова вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной?
Трое охотников одновременно выстрелили по медведям, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно: 0,2 ; 0,4 ; 0,6.
Была проведена одна и та же контрольная работа в трех параллельных группах. В 1-ой группе, где 30 учащихся, оказалось 8 работ, выполненных на «отлично»; во 20ой, где 28 учащихся – 6 работ, в 3-ей, где 27 учащихся – 9 работ. Найти вероятность того, что первая взятая наудачу при повторной проверке работа из работ, принадлежащих группе, которая также выбрана наудачу, окажется выполненной на «отлично».
В пирамиде 5 винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.
В вычислительной лаборатории имеется шесть клавишных автомата и четыре полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95. для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Студент производит расчет на наудачу выбранной машине. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.
В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95. Для винтовки без оптического прицела 0,8. Стрелок поразил мишень их наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

Самостоятельная работа №8 Подготовка сообщения «Династия Бернулли»

Цель: получить представление о вкладе Бернулли в развитие теории вероятностей и другие науки
Самостоятельная работа: работа с литературой
Форма контроля: сообщение на уроке

Самостоятельная работа №9 Вычисление вероятностей сложных событий с помощью формулы Бернулли

Цель: получить навыки по вычислению вероятностей сложных событий с помощью формулы Бернулли
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий
План:
Схема Бернулли. Формула Бернулли
Предельные теоремы для схемы Бернулли

Схема Бернулли. Формула Бернулли
Пусть производится n независимых однотипных испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с вероятностью Р. Тогда вероятность непоявления события А, т.е. Р(µ §) равна q=1-p.
Вероятность того, что событие А произойдет в этих n независимых испытаниях ровно k раз, можно вычислить по формуле Бернулли
µ §

Для определения вероятности появления события А менее m раз (k < m), более m раз (k > m), хотя бы один раз (µ §) и т. п. могут быть использованы формулы:
µ §,
µ §,
µ §.

Пример: Прибор состоит из пяти узлов. Надежность (вероятность безотказной работы в течение времени t) для каждого узла равна 0,9. Узлы выходят из строя независимо один от другого. Найти вероятность того, что за время t откажут ровно два узла.

Решение: Рассмотрим событие А - выход узла из строя за время t. Число узлов n=5. Число отказавших узлов за время t: k=2.
Р(А) - вероятность выхода узла из строя: р =Р(А)=0,1. Тогда q=1-p=1-0,1=0,9.
Теперь вычислим искомую вероятность по формуле Бернулли:
P5(2) =µ §(0,1)2 .(0,9)3=10.0,01.0,729=0,0729.

Пример . Всхожесть семян данного растения равна 90 %. Найти вероятность того, что из четырех посеянных семян взойдут: а) три; б) не менее трех.

Решение
а) Искомую вероятность находим с помощью формулы Бернулли (14), учитывая что µ §, µ §, µ §, µ §.
µ §.
б) «Не менее трех» означает, что из четырех семян взойдут или три, или четыре. Так как эти события несовместны, то по теореме сложения искомая вероятность равна
µ §.

Предельные теоремы для схемы Бернулли

Теорема Пуассона. (Отметим, что на практике эта теорема применяется при µ § Это означает, что p должно быть очень малым числом). Пусть имеется n независимых испытаний с вероятностью p успеха в одном испытании и q- вероятностью неудачи. Тогда для любого фиксированного m справедливо соотношение
µ §, где µ §

Пример. Машинистка печатает текст, который содержит 20000 знаков. Каждый знак может быть напечатан неправильно с вероятностью 0.0004. Какова вероятность того, что в тексте не менее 3 опечаток?

Решение. Если опечатку считать успехом, то к этой задаче применима схема Бернулли при p=0.0004, n=20000. Поскольку λ=np=8, то можно использовать предельную теорему Пуассона. Поэтому, искомая вероятность равна 1-Pn0- Pn1- Pn2=1-e-8- 8 e-8-(64/2) e-8= 1-41 e-8=0.986.

Пример. Монета бросается 100 раз. Найти приближенно вероятность того, что герб выпадет 40 раз. (Воспользоваться таблицей)

Решение. Если считать успехом выпадение герба, то вероятность успеха равна 1/2. Поэтому используя предельную локальную теорему Муавра-Лапласа, получим
μ §, где μ §
Таким образом, используя таблицы для плотности нормального распределения, получим P(A)=0.0108.

Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Пусть имеется n независимых испытаний с вероятностью успеха p, μ §, в одном испытании и μ § - вероятностью неудачи. Величина μ §не зависит от n. Тогда .для любых вещественных чисел a<b при μ §
P(a<μ §<b)=Φ(b)- Φ(a).
Здесь Φ(x)=μ §- функция Лапласа, значения которой заданы в таблицах, приведенных в большинстве задачников по вероятности и математической статистике.

Пример. При рождении ребенка вероятность рождения мальчика равна 0.512. Найти вероятность того, что среди 1000 новорожденных мальчиков родится больше, чем девочек.
Решение. Пусть A – это событие, соответствующее вопросу задачи, m – это число рожденных мальчиков. Нетрудно видеть, что P(A) = P(m>500). Поскольку n=1000 можно считать достаточно большим, то применим интегральную теорему Муавра-Лапласа, согласно которой
P(A)=P(μ §
Варианты заданий

Решить задачи
В магазин поступила партия лампочек, среди них 3 % составляет брак. Найти вероятность того, что из 5 купленных лампочек 4 будут хорошими.
Вероятность изготовления на автоматическом станке бракованной детали равна 0,1. Какова вероятность того, что из четырех деталей бракованных окажется не более двух?
При установившемся технологическом процессе автомат производит 0,75 числа деталей первого сорта и 0,25 – второго. Установить, что является более вероятным – получить 3 первосортных детали среди 5 наудачу отобранных или 4 первосортных среди 6 наудачу отобранных?
Среди изделий, произведенных а станке-автомате, в среднем бывает 90 % изделий первого сорта. Какова вероятность того, что среди 5 наудачу выбранных изделий будет не менее 4 первого сорта?
Что вероятнее: выиграть у равносильного противника не менее 3 партий из 4 или не менее 5 из 8?
Вероятность банкротства одной из 5 фирм к концу года равна 0,2. Какова вероятность того, что к концу года обанкротится не более двух фирм?

Самостоятельная работа №10 Запись распределения ДСВ, заданной содержательным образом
Цель: получить навыки по записи распределения ДСВ, заданной содержательным образом
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий
План:
Случайные величины.
Пример построения ряда распределения ДСВ
Функция распределения ДСВ
Пример построения функции от ДСВ.

Случайные величины
Определение: Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта примет одно и только одно возможное значение, при этом заранее неизвестно, какое именно.

Определение: Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, изолированные значения.
Случайную величину в дальнейшем мы будем обозначать большой буквой X, а ее возможные значения маленькой буквой x.
Например, X- число попаданий при трех выстрелах. Возможные значения этой случайной величины: x1=0, x2=1, x3=2, x4=3. Рассмотрим случайную величину X с возможными значениями x1, x2,…xn . Каждое из этих значений случайная величина может принять с некоторой вероятностью:
P(X=x1)=p1, P(X=x2)=p2, … P(X=xn)=pn.
В результате опыта случайная величина X примет только одно из этих значений, т.е. произойдет только одно из полной группы событий: X=x1 ,X=x2, … X=xn.
Поскольку сумма вероятностей полной группы попарно несовместных событий равна 1, то µ §

Определение: Законом распределения ДСВ называется соотношение между ее возможными значениями и их вероятностями (т. е. вероятностями, с которыми случайная величина принимает эти возможные значения).
Закон распределения может быть задан формулой (формулы Бернулли, Пуассона и др.), таблицей или графиком, а также функцией распределения.
xix1x2. . .xnPip1p2. . .pnназывается законом или рядом распределения дискретной случайной величины.

Пример ДСВ – число точек на грани игрального кубика, выпадающее при его подбрасывании.

!Задание привести пример ДСВ из окружающей жизни
Закон распределения может быть задан формулой (формулы Бернулли, Пуассона и др.), таблицей или графиком, а также функцией распределения.
Пример построения ряда распределения ДСВ
Пример: Два стрелка стреляют по мишени, делая по два выстрела каждый. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго - 0,6. Построить ряд распределения случайной величины X – общего числа попаданий в мишень. Найти числовые характеристики этой случайной величины.

Решение: Случайная величина X - общее число попаданий в мишень может принимать следующие значения: x1=0, x2=1, x3=2, x4=3, x5=4.
Случайная величина X примет значение x1=0. когда произойдет событие C - ни один из стрелков не попал в мишень. Событие C произойдет в том случае, если одновременно произойдут следующие четыре события:
A1 - 1-й стрелок не попал в мишень при первом выстреле;
A2 - 1-й стрелок не попал в мишень при втором выстреле;
B1 - 2-й стрелок не попал в мишень при первом выстреле;
B2 - 2-й стрелок не попал в мишень при втором выстреле.
Отсюда следует: что событие C равно произведению независимых событий A1, A2, B1, B2. C= A1 .A2 .B1 .B2.
Откуда P(C)=P(A1).P(A2).P(B1).P(B2).
По условию задачи 1-й стрелок попадает в мишень вероятностью 0,7, а 2-й - с вероятностью 0,6. Тогда вероятности непопадании в мишень для каждого стрелка будут следующими:
P(A1) =P(A2)=1-0,7=0,3; P(B1)=P(B2)=1-0,6=0,4.
Вероятность того, что случайная величина X примет значение x1 = 0, равна вероятности события C :
P(X=0)=P(C)=0,3 .0,3 .0,4 .0,4=0,0144.
Аналогично подсчитываем и другие вероятности:
P(X=1)=0,7.0,3.0,4 .0,4+0,3.0,7.0,4 .0,4+0,3.0,3.0,6.0,4+0,3.0,3.0,4 . .0,6=0,1104.
P(X=2)=0,7.0,7.0,4 .0,4+0,3 .0,3 .0,4 .0,4+4 .(0,7 .0,3 .0,6 .0,4)=0,3124.
P(X=3)=0,3.0,7.0,6.0,6+0,7.0,3.0,6.0,6+0,7.0,7.0,4.0,6+0,7.0,7.0,6.0,4==0,3864.
P(X=4)=0,7 .0,7 .0,6 .0,6=0,1764.
Составим ряд распределения случайной величины X.
xi01234

Pi	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764

Проверим тождество µ §.
0,0114+0,1104+0,3124+0,3864+0,1764 =1.
Варианты заданий
Решить задачи

1. Связь с дрейфующей станцией могут поддерживать три радиостанции. Вступает с ней в двустороннюю связь та радиостанция, которая первая примет позывные дрейфующей станции. Причем принять сигналы дрейфующей станции для каждой радиостанции имеет одну и ту же вероятность, равную 1/3. Дрейфующая станция будет устанавливать связь 4 раза в сутки. Составить ряд распределения случайной величины - числа вступлений в двустороннюю связь для радиостанции №1.
2. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,1. Для проверки на качество ОТК берет из партии не более четырех деталей. При обнаружении нестандартной детали вся партия задерживается. Составить ряд распределения числа подвергшихся проверке деталей.
3. В цехе брак составляет 5% всех изделий. Составить ряд распределения числа бракованных изделий из трех взятых наудачу.
4. В благоприятном режиме устройство выдерживает три применения без регулировок, перед четвертым его приходится регулировать. В неблагоприятном режиме его приходится регулировать после первого же применения. Вероятность того, что устройство попадает в благоприятный режим, равна 0,7, в неблагоприятный -0,3. Рассматривается случайная величина - число применений устройства до регулировки. Найти ее ряд распределения.

Самостоятельная работа №11 Запись распределения функции от одной ДСВ и функции от двух независимых ДСВ

Цель: получить навыки по записи распределения функции от одной ДСВ и функции от двух независимых ДСВ

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Функция распределения ДСВ

<u>Определение</u>*:* Функцией распределения случайной величины X называется функция

$$F(x) = P(X < x),$$

определяющая вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x.

Свойства функции распределения:

а) функция распределения принимает значения только из отрезка [0,1]:

$0 \le F(x) \le 1$;

б) F(x) – неубывающая функция, т.е. если $x_2 > x_1$, то $F(x_2) > F(x_1)$;

в) $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$;

г) вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $\lfloor a,b)$ (причем $a < b$), равна:

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a);$$

Функция распределения содержит всю информацию об этой случайной величине и поэтому изучение случайной величины заключается в *исследовании ее функции распределения,* которую часто называют просто *распределением*.

У дискретной случайной величины функция распределения ступенчатая.

2. Пример построения функции от ДСВ

<u>Пример:</u> Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	2	3	4
p(x)	0,2	0,3	P_3	0,1

Найти вероятность p_3. Построить функцию распределения. Найти числовые характеристики с.в.

<u>Решение:</u>

Проверим тождество $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

$0{,}2+0{,}3+p_3+0{,}1=1.$

$p_3=0{,}4.$

Построим функцию распределения этой случайной величины.

Имеем:

$при \quad x \le 1 \quad F(x) = P(X < x) = P(\oslash) = 0;$

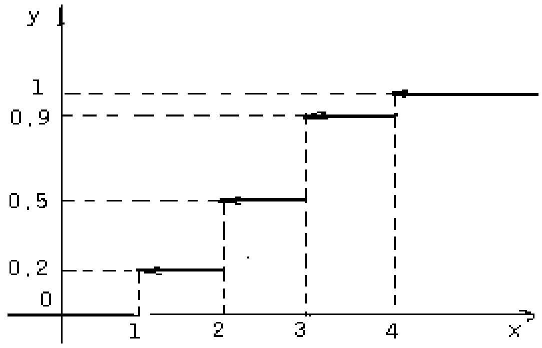
$при \quad 1 < x \le 2 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1) = 0{,}2;$

$при \quad 2 < x \le 3 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5;$

$при \quad 3 < x \le 4 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2, X = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}9;$

$при \quad x > 4 \quad F(x) = P(X < x) = P(X = 1, X = 2, X = 3, X = 4) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}1 = 1.$

Итак,



Варианты заданий
Решить задачи

1. Случайные величины X и Y подчиняются законам распределения

x	1	3	4		y	0	1	2
p(x)	0,2	0,5	0,3		p(y)	0,5	0,4	0,1

Построить ряд распределения случайной величины X+Y.
Построить ряд распределения случайной величины X-Y.

<u>Самостоятельная работа №12 Вычисление характеристик ДСВ, заданной своим распределением, вычисление (с помощью свойств) характеристик для функций от одной или нескольких ДСВ</u>

Цель: получить навыки по вычислению характеристик ДСВ, заданной своим распределением, вычисление (с помощью свойств) характеристик для функций от одной или нескольких ДСВ
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

План:

1. Математическое ожидание ДСВ.
2. Дисперсия ДСВ.
3. Среднее квадратическое отклонение ДСВ.

1. Математическое ожидание ДСВ

<u>Определение</u>: ***Математическое ожидание*** ДСВ находится по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

<u>Вероятностный смысл</u> этого выражения таков: при большом числе измерений среднее значение наблюдаемых значений величины X приближается к ее математическому ожиданию.

<u>Механический смысл</u> этого равенства заключается в следующем: математическое ожидание есть абсцисса центра тяжести системы материальных точек, абсциссы которых равны возможным значениям случайной величины, а массы - их вероятностям.

2. Дисперсия ДСВ

<u>Определение</u>: ***Дисперсия*** случайной величины X есть

$$D(X) = M((X - M(X))^2)$$

Дисперсию случайной величины X иногда удобнее вычислять по формуле

$$Д(X) = M(X)^2 - (M(X))^2.$$

<u>*Вероятностный смысл*</u> Дисперсия случайной величины X есть характеристика рассеивания разбросанности значений случайной величины около ее математического ожидания. Дисперсия случайной величины имеет размерность квадрата случайной величины.

3. Среднее квадратическое отклонение

Для более наглядной характеристики рассеивания удобнее пользоваться величиной, имеющей размерность самой случайной величины. Поэтому вводится понятие <u>среднего квадратического отклонения</u>: $\sigma(X) = \sqrt{Д(X)}$.

<u>Пример</u>: Случайная величина X задана функцией распределения

x	1	2	3	4
p(x)	0,2	0,3	P_3	0,1

Найти вероятность p_3. Найти числовые характеристики с.в.

РЕШЕНИЕ:

Проверим тождество $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$

$0,2+0,3+p_3+0,1=1.$

$p_3=0,4.$

Найдем числовые характеристики случайной величины X:

$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$M(X)=1\cdot 0,2+2\cdot 0,3+3\cdot 0,4+4\cdot 0,1=0,2+0,6+1,2+0,4=2,4.$

Для вычисления дисперсии применим формулу: $Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2$.

$M(X^2)=1^2\cdot 0,2+2^2\cdot 0,3+3^2\cdot 0,4+4^2\cdot 0,1=0,2+1,2+3,6+1,6=6,6.$

$Д(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 6,6 - (2,4)^2 = 0,84.$

$\sigma(X) = \sqrt{Д(X)} = \sqrt{0,84} \approx 0,916.$

Варианты заданий

Решить задачи

1. Батарея состоит из трех орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из 1-го, 2-го, 3-го орудия равны соответственно 0,5; 0,6; 0,8. Каждое из орудий стреляет по некоторой цели один раз. Построить ряд распределения случайной величины числа попаданий в цель. Вычислить числовые характеристики.
2. В ящике семь изделий, одно из которых бракованное. Из ящика извлекают одно изделие за другим, пока не обнаружат брак. Составить ряд распределения случайной величины - числа вынутых изделий. Найти ее числовые характеристики.
3. Дискретная случайная величина *X* задана рядом распределения:

x_i	-2	1	2	3
p_i	0,08	0,40	0,32	0,2

Найти: а) математическое ожидание; б) дисперсию; в) среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*; г) функцию распределения (найти и построить).

Самостоятельная работа №13 Вычисление вероятностей для равномерно распределенной НСВ и для случайной точки, равномерно распределенной в плоской фигуре

Цель: получить навыки по вычислению вероятностей для равномерно распределенной НСВ и для случайной точки, равномерно распределенной в плоской фигуре
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Непрерывные случайные величины (НСВ)

Множество значений непрерывной случайной величины несчетно и обычно представляет собой некоторый промежуток конечный или бесконечный.

Пусть X - некоторое действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что с.в. X примет значение, меньшее x, обозначим F(x), т.е. F(x)=P(X<x).

Определение: Функция F(x) называется ***функцией распределения*** с.в.X или ***интегральной функцией***.

Например, значение функции F(x) при x=2 равно вероятности того, что с.в. X в результате испытания примет значение, меньшее двух, т.е. F(2)=P(X<2).

Определение: С. в. называется ***непрерывной (НСВ)***, если ее функция распределения F(x) является непрерывной функцией.

Свойства функции распределения:

1. F(x)- неубывающая функция;
2. $\lim\limits_{x\to -\infty} F(x)=0$; $\lim\limits_{x\to \infty} F(x)=1$;
3. P(a≤X<в)= F(в)-F(a).

Определение: Функция f(x)= F′(x) называется ***плотностью распределения*** вероятностей НСВ X.

Функция f(x) существует во всех точках, где существует производная от функции распределения.

Определение: Плотность распределения называют также ***дифференциальной функцией*** распределения.

График функции плотности распределения называется кривой распределения, и площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна единице. Тогда геометрически значение функции распределения F(x) в точке x_0 есть площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс и лежащая левее точки x_0.

Свойства плотности распределения:

1. f(x)≥0;
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$; (характеристическое свойство)
3. P(a<X<в)= $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Зная плотность распределения f(x), можно найти функцию распределения F(x) по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ .$$

Пример: Функция плотности непрерывной случайной величины имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\notin[0,2] \\ Cx^2, & x\in[0,2] \end{cases}$$

Определить константу C, построить функцию распределения F(x) и вычислить вероятность $P\{-1\le x\le 1\}$.

Решение. Константа C находится из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$. Имеем:

$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_0^2 Cx^2dx=C\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{8C}{3}$, откуда C=3/8.

Чтобы построить функцию распределения F(x), отметим, что интервал [0,2] делит область значений аргумента x (числовую ось) на три части: $(-\infty,0),[0,2],(2,\infty)$. Рассмотрим каждый из этих интервалов. В первом случае (когда x<0) вероятность события {X<x} вычисляется так:

$$F(x)=P(X<x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt=0,$$

так как плотность x на полуоси $(-\infty,0)$ равна нулю.

Во втором случае

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt=0+\frac{3}{8}\int_0^x t^2dt=\frac{x^3}{8}.$$

Наконец, в последнем случае, когда x>2,

$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{2} f(t)dt+\int_{2}^{x} f(t)dt=0+\frac{3}{8}\int_0^2 t^2dt=0+1+0=1,$ так как плотность $f(x)$ обращается в нуль на полуоси $(2,\infty)$.

Итак, получена функция распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \dfrac{x^3}{8}, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2 \end{cases}$$

Вероятность $P\{-1\le X\le 1\}$ вычислим по формуле $P\{a\le X\le b\}=F(b)-F(a)$. Таким образом, $P\{-1\le X\le 1\}=F(1)-F(-1)=1/8-0$.

Нахождение интегральной функция распределения НСВ

Пример: Дана плотность распределения случайной величины *X*:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \ \ при \ \ x\le 0, \\ Ax^2 \ \ при \ \ 0<x\le 2, \\ 0, \ при \ \ x>2. \end{cases}$$

Требуется:

а) найти параметр *A*;

б) функцию распределения случайной величины *X*;

в) построить график функции распределения;

г) найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал $(1/2;1)$.

Решение:

а) Параметр A подберем так, чтобы выполнялось свойство (2) плотности распределения: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{0}^{2} Ax^2 dx = A\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}A,\ \frac{8}{3}A = 1.$$

Отсюда $A = \frac{3}{8}$.

б) Функцию распределения $F(x)$ будем искать на каждом интервале отдельно.

Для значений $x \le 0$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0,$$

Для значений $0 < x \le 2$

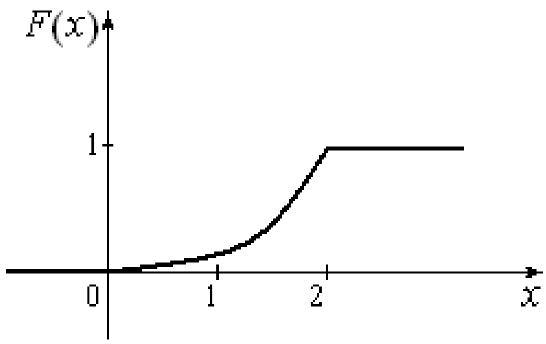
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{x} \frac{3}{8}t^2 dt = \left.\frac{t^3}{8}\right|_0^x = \frac{x^3}{8}.$$

Для значений $x > 2$

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{0}^{2} \frac{3}{8}t^2 dt = \left.\frac{t^3}{8}\right|_0^2 = \frac{2^3}{8} = 1.$$

Таким образом, $F(x) = \begin{cases} 0 \ \ при \ \ x \le 0, \\ \dfrac{x^3}{8} \ \ при \ \ 0 < x \le 2, \\ 1, \ \ при \ \ x > 2. \end{cases}$

График этой функции изображен на рисунке



в) Вероятность попадания случайной величины X в интервал $(1/2;\, 1)$ вычисляем по формуле $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$:

$$P\left(\frac{1}{2} < X < 1\right) = F(1) - F\left(\frac{1}{2}\right) = \left.\frac{x^3}{8}\right|_{1/2}^{1} = \frac{1}{8} - \frac{1}{64} = \frac{7}{64}.$$

Равномерное распределение

Равномерным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если на отрезке $[a;\, b]$, которому принадлежат все возможные значения X, плотность распределения сохраняет постоянное значение, а именно:

$$f(x) = \frac{1}{b-a},$$

вне этого отрезка $f(x) = 0$.

Пример: Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут.

Решение: Время ожидания является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале [0, 5]. Тогда

$$f(x) = \frac{1}{5}, \ p(0 \le x \le 2) = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Пример: Случайная величина равномерно распределена на отрезке [0,2]. Найти плотность случайной величины $\eta = -\sqrt{\xi + 1}$.

Решение: Из условия задачи следует, что

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0,2] \\ \dfrac{1}{2}, & x \in [0,2] \end{cases}$$

Далее, функция $y = -\sqrt{x+1}$ является монотонной и дифференцируемой функцией на отрезке [0,2] и имеет обратную функцию $x = \varphi^{-1}(y) = y^2 - 1$, производная которой равна $\dfrac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} = 2y.$ Следовательно,

$$\eth_{\eta}(y) = \eth_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \left| \frac{d\varphi^{-1}(y)}{dy} \right| = \eth_{\xi}(\varphi^{-1}(y)) \cdot 2\,|\,y\,| = 2\,|\,y\,| \cdot \begin{cases} 0, & y^2 - 1 \notin [0,2] \\ \dfrac{1}{2}, & y^2 - 1 \in [0,2] \end{cases}.$$

Значит,

$$\eth_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \notin [-\sqrt{3}, -1] \\ -y, & y \in [-\sqrt{3}, -1] \end{cases}$$

Варианты заданий
Решить задачи

1. Плотность распределения с.в. X задана следующей функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\Pi}{2}; \\ a\cos x, & -\frac{\Pi}{2} \le x \le \frac{\Pi}{2}; \\ 0, & x > \frac{\Pi}{2}. \end{cases}$$

   1) Найти a, F (x).
   2) Построить графики функций f(x), F(x).
   3) 3) Вычислить $P(0<X<\frac{\Pi}{2})$.

2. С.в. X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2; \\ (x-2)^2, & 2 \le x \le 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

   1) Найти f(x).
   2) Построить графики функций f(x), F(x).
   3) Вычислить $P(2{,}5<X<3{,}5)$.

3. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [1,3]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2 + 1$.
4. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [-1,1]. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = -\ln(\xi + 2)$.

5. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках [0, 2] и [3,4] соответственно. Вычислить плотность суммы ξ+η.
6. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках [0, 4] и [1,2] соответственно. Вычислить плотность суммы ξ+η.
7. Случайные величины ξ и η независимы и равномерно распределены на отрезках [1, 3] и [2,4] соответственно. Вычислить плотность суммы ξ+η.

Самостоятельная работа №14 Вычисление вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности

Цель: получить навыки по вычислению вероятностей и нахождение характеристик для НСВ с помощью функции плотности
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Числовые характеристики НСВ

Математическое ожидание с.в. X находится по формуле

$$M(X)= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

если сходится несобственный интеграл.

Дисперсией с.в. X называют несобственный интеграл

$$Д(X)= \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx,$$

если он сходится.
Для вычисления дисперсии более удобна следующая формула:

$$Д(X)= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2.$$

Пример. Случайная величина X задана плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0, \\ x - \frac{1}{4}x^3 \quad \text{при} \quad 0 < x < 2, \\ 0 \quad \text{при} \quad x \ge 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратичное отклонение с.в. *X*.
Воспользуемся определениями.

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^2 x\left(x - \frac{1}{4}x^3\right)dx = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5\right)\Bigg|_0^2 = \frac{8}{3} - \frac{8}{5} = \frac{16}{15}.$$

$$M[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^2 x^2\left(x - \frac{1}{4}x^3\right)dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6\right)\Bigg|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{4}{3} - \frac{256}{225} = \frac{44}{225}.$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \frac{2\sqrt{11}}{15}.$$

Пример: Плотность распределения с.в. задана функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x < -1; \\ a(x+2), \quad -1 \le x < 0; \\ ax, \quad 0 \le x < 1; \\ 0, \quad x \ge 1 \end{cases}$$

1) Найти a, F(x), M(X), Д(X).

2) Вычислить P(-2<X<1/2).

Решение: Для нахождения параметра а воспользуемся свойством плотности распределения вероятностей: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int\limits_{-1}^{0} a(x+2)dx + \int\limits_{0}^{1} axdx + \int\limits_{1}^{\infty} 0 \cdot dx =$$

$$= a\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_{-1}^{0} + a\frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} = a\left(-\frac{1}{2} + 2\right) + \frac{1}{2}a = 2a = 1.$$

Отсюда находим а= $\frac{1}{2}$.

Тогда функцию плотности распределения можно записать следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{1}{2}x + 1, & -1 \le x < 0; \\ \frac{1}{2}x, & 0 \le x < 1; \\ 0, & x \ge 1 \end{cases}$$

Найдем функцию распределения вероятностей F(x):

Для x<-1 F(x)= $\int\limits_{-\infty}^{x} 0 \cdot dx = 0.$

Для -1≤x<0 F(x)= $\int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int\limits_{-1}^{x} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx = \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_{-1}^{x} = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4}.$

Для 0≤x<1 $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2}xdx = \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{4}\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}.$

Для x≥1

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx + \int\limits_{0}^{1} \frac{1}{2}xdx + \int\limits_{1}^{x} 0dx = \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{4}\Big|_{0}^{1} =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1 = 1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1; \\ \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{3}{4}, & -1 \le x < 0; \\ \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}, & 0 \le x < 1; \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$

Вычислим числовые характеристики с.в. X .

Математическое ожидание

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x^2 + x\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x^2dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{6}\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Дисперсия

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2 = \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x^3 + x^2\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} x^3dx - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^4}{8}\Bigg|_{0}^{1} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

2) Вычислим P(-2<X<1/2).

Вычислить эту вероятность можно двумя способами: с помощью функции плотности или с помощью функции распределения вероятностей.

$$P\left(-2 < X < \frac{1}{2}\right) = \int\limits_{-2}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int\limits_{-2}^{-1} 0dx + \int\limits_{-1}^{0} \left(\frac{1}{2}x + 1\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} xdx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{4} + x\right)\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{4}\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{16} = \frac{13}{16}.$$

или

$P(-2<X<1/2)=F(1/2)-F(-2)=\left(\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right)-0=\frac{13}{16}.$

Варианты заданий

Решить задачи

1. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}C(x+1), x\notin[-1,2]\\ 0, x\in[-1,2]\end{cases}$$

Вычислить константу С, функцию распределения F(X), M(X) и вероятность $P\{X^2<1\}$.

2. Плотность распределения случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}C(x+1)^{-3/2}, x\geq 0\\ 0, x<0\end{cases}$$

Вычислить константу С, функцию распределения F(X), M(X), D(X) и вероятность $P\{|X-1/3|<1\}$.

<u>Самостоятельная работа №15 Вычисление вероятностей для нормально распределенной величины</u>

Цель: получить навыки по вычислению вероятностей для нормально распределенной величины

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Нормальное распределение

Непрерывная случайная величина X имеет ***нормальное распределение*** (или *распределение Гаусса*), если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Постоянные a и σ ($\sigma>0$) называются *параметрами нормального распределения* и представляют собой соответственно математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение случайной величины X, т. е.

$$M(X)=a,\ \sigma(X)=\sigma.$$

Отсюда $D(X)=\sigma^2$.

График функции $f(x)$ называют *нормальной кривой* (или *кривой Гаусса*). Кривая имеет форму «колокола», симметричного относительно прямой $x=a$ (рис. 1).

Функция распределения нормальной случайной величины

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$$

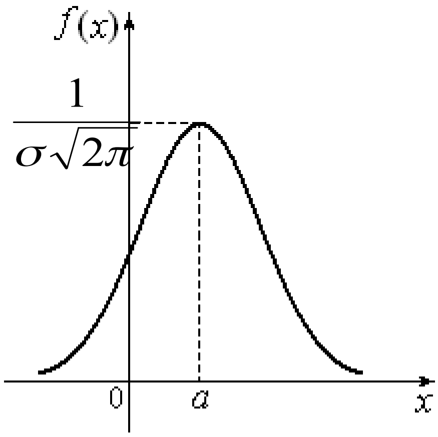


Рис. 1

связана с функцией Лапласа соотношением

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+0{,}5.$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ - функция Лапласа, таблицу значений которой можно найти в приложениях.

<u>Замечание:</u> Ф(х) - функция нечетная, т.е. Ф(-х)=-Ф(х).

Поэтому для нормальной случайной величины справедлива формула

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения нормальной случайной величины меньше положительного числа δ, равна:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

В частности,

$$P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Отсюда следует «***правило трех сигм***»: если случайная величина X имеет нормальное распределение, то отклонение этой случайной величины от ее математического ожидания по абсолютной величине не превышает утроенное среднее квадратическое отклонение (3σ).

Нормальный закон – наиболее часто встречающийся закон распределения, он является предельным законом, к которому, при определенных условиях, приближаются другие законы распределения.

Пример. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью вероятности $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-6)^2}{8}}$. Требуется найти:

а) математическое ожидание и дисперсию X;

б) вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу $(3;10)$;

в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения X от математического ожидания окажется меньше 5.

Решение.

а) Сравнив данную функцию с плотностью нормального распределения, заключаем, что $a=6$, $\sigma=2$. Следовательно, $M(X)=6$, $D(X)=2^2=4$.

б) Воспользуемся формулой $P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$.

В нашем случае $a=6$, $\sigma=2$, $\alpha=3$; $\beta=10$.

$$P(3<X<10)=\Phi\left(\frac{10-6}{2}\right)-\Phi\left(\frac{3-6}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1{,}5)=\Phi(2)+\Phi(1{,}5)\approx 0{,}4772+0{,}4332=0{,}9104$$

Значения $\Phi(2)$ и $\Phi(1{,}5)$ определили по таблице значений функции Лапласа.

в) Воспользуемся формулой $P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$, где $a=6$, $\sigma=2$, $\delta=5$.

$$P(|X-6|<5)=2\Phi\left(\frac{5}{2}\right)=2\Phi(2{,}5)\approx 2\cdot 0{,}4938=0{,}9876.$$

Пример: Ошибка измерительного прибора - случайная величина, распределенная по нормальному закону, со средним квадратическим отклонением 3 мк. Систематическая ошибка прибора отсутствует. Какова вероятность того, что в независимом измерении ошибка окажется в интервале (0 ; 2,4)?

Решение: Вычислим вероятность того, что в результате измерения случайная, величина X - ошибка измерительного прибора будет принадлежать интервалу (0 ; 2,4):

$$P(0<X<2{,}4)=\Phi\left(\frac{2{,}4-0}{3}\right)-\Phi\left(\frac{0-0}{3}\right)=\Phi(0{,}8)-\Phi(0)=0{,}2881$$

Здесь математическое ожидание a=0 (так как систематическая ошибка отсутствует, то среднее значение ошибки при большом числе измерений будит равно нулю).

Ф(0)=0, Ф(0,8)=0,2881 находим по таблице Лапласа.

Теперь найдем вероятность события $\overline{A}$, состоящего в том, что в результате трех измерений

Пример: Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием, равным 10. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (4 ; 16), равна 0,8664. Найти среднее квадратическое отклонение этой случайной величины.

Решение: По условию задачи случайная величина X имеет математическое ожидание a=10 и $P(4<X<16)=0{,}8664.$

Но, с другой стороны,

$$P(4<X<16)=\Phi\left(\frac{16-10}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{4-10}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{6}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)+\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{6}{\sigma}\right)$$

где σ - среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

Итак, $2\Phi(\frac{6}{\sigma})=0{,}8664$ или $\Phi(\frac{6}{\sigma})=0{,}4332$.

По таблице значений функции Лапласа находим $\frac{6}{\sigma}=1{,}5$. Откуда σ=4.

Варианты заданий

Решить задачи

Нормально распределенная случайная величина *X* задана плотностью вероятности *f*(*x*). Требуется найти:

а) математическое ожидание и дисперсию *X*;

б) вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\ \beta)$;

в) вероятность того, что абсолютная величина отклонения $X-M(X)$ окажется меньше δ.

1. $f(x)=\dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-11)^2}{18}}$,
$\alpha=7;\ \beta=17;\ \delta=6.$

2. $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-14)^2}{32}}$,
$\alpha=10;\ \beta=20;\ \delta=10.$

Решить задачи

1. Производится два независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку 5 м и среднее квадратическое отклонение 6 м. Какова вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного по абсолютной величине не более, чем на 15 м?
2. Завод изготавливает шарики для подшипников. Номинальный диаметр шариков d_0= 5 мм. Вследствие неточности изготовления шарика фактический его диаметр - случайная величина, распределенная по нормальному закону со средним значением d_0 и средним квадратическим отклонением σ= 0,05 мм. При контроле бракуются все шарики, диаметр которых отличается от номинального

больше чем на 0,1 мм. Определить, какой процент шариков в среднем будет отбраковываться?

3. Производится выстрел по полосе автострады. Ширина полосы 20 м. Прицеливание производится по средней линии полосы. Систематическая ошибка отсутствует. Среднее квадратическое отклонение точки попадания в направлении, перпендикулярном полосе, равно 16 м. Найти вероятность попадания в полосу.

Самостоятельная работа №16 Подготовка сообщения «Возникновение математической статистики»

Цель: получить представление о возникновении математической статистики
Самостоятельная работа: работа с литературой
Форма контроля: сообщение на уроке

Самостоятельная работа №17 Построение для заданной выборки ее графической диаграммы; расчет по заданной выборке ее числовых характеристик

Цель: получить навыки по построению для заданной выборки ее графической диаграммы; расчету по заданной выборке ее числовых характеристик
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

Математическая статистика

План:

1. Основные понятия математической статистики
2. Графическое изображение выборки
3. Точечные оценки параметров распределения

1. Основные понятия математической статистики

На практике функция распределения случайной величины бывает неизвестна и ее определяют по результатам наблюдений или, как говорят, по выборке. ***Выборкой объема n*** для случайной величины называется последовательность независимых наблюдений этой величины, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – совокупность значений, принятых независимыми случайными величинами $X_1, X_2, \dots, X_n$, имеющими тот же закон распределения $F(x)$, что и величина *X*. В этом случае говорят, что выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ взята из ***генеральной совокупности*** величины *X*, а под законом распределения генеральной совокупности понимают закон распределения случайной величины *X*. Значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ называют выборочными значениями или ***вариантами***. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется ***вариационным рядом***. Число, указывающее, сколько раз наблюдается данная варианта, называется ***частотой варианты***, а отношение частоты варианты к объему выборки – ***относительной частотой***.

Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ – вариационный ряд, а *x* – произвольное число, и n_x – количество выборочных значений, меньших *x*, то $\frac{n_x}{n}$ – частота попадания выборочных значений левее точки *x* в данной выбоке объема *n*, т. е. частота события $(X < x)$.

Эта частота является функцией от x и называется ***эмпирической функцией распределения*** **случайной величины *X***, полученной по данной выборке. Если обозначить эту функцию через $F^*(x)$, то по определению

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}.$$

Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ обладает всеми свойствами функции распределения $F(x)$. Так как частота события в n независимых опытах является оценкой вероятности этого события, то значение эмпирической функции распределения в точке x есть оценка вероятности события $(X<x)$, то есть оценка теоретической функции распределения $F(x)$:

$$F(x)\approx F^*(x).$$

Статистическим рядом распределения называется таблица, которая содержит вариационный ряд и соответствующие частоты или относительные частоты членов этого ряда (табл. 1).

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = n,$$

$$w_i=\frac{n_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Таблица 1

x_1	x_2	…	x_k
n_1	n_2	…	n_k
w_1	w_2	…	w_k

Таблица 2

$(x_0;x_1)$	$(x_1;x_2)$	…	$(x_{k-1};x_k)$
n_1	n_2	…	n_k
w_1	w_2	…	w_k

В случае непрерывного распределения величины X статистический ряд распределения представляет собой таблицу, в которой заданы интервалы значений величины X и соответствующие им частоты или относительные частоты, причем интервалы располагаются в порядке возрастания величины X (табл. 2).

Второй случай легко сводится к первому, если в качестве вариант брать середины интервалов:

$$\hat{x}_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}, \quad i=\overline{1,k}.$$

2. Графическое изображение выборки

Графически табл. 1 изображается ***полигоном частот***, представляющим собой ломаную, отрезки которой соединяют на плоскости соседние точки $(x_i;n_i)$ и $(x_{i+1};n_{i+1})$ или $(x_i;w_i)$ и $(x_{i+1};w_{i+1})$, если строится полигон относительных частот.

В случае табл. 2 исходный интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения признака, разбивают на определенное количество равных интервалов длины $h=x_i-x_{i-1}$. После этого строится ***гистограмма частот*** – ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основания которых равны h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (или $\frac{w_i}{h}$ для гистограммы относительных частот).

Гистограмма относительных частот является аналогом функции плотности, так как площадь под ней равна единице. Число интервалов разбиения находят по формуле $k=1+3{,}322\lg n$, где n – объем выборки. Тогда длина каждого интервала $h=\frac{x_{\max}-x_{\min}}{k}$, где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – максимальное и минимальное значение выборки соответственно.

3. Точечные оценки параметров распределения

По аналогии с такими числовыми характеристиками случайной величины, как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение, для выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ случайной величины X и для статистического ряда определяются следующие числовые характеристики:

выборочная средняя $\bar{x}_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$,

где k – число вариант и $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$;

выборочная дисперсия $D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2$

или $D_в = \overline{x^2} - (\bar{x}_в)^2$, $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$;

выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = \sqrt{D_в}$

Во многих случаях бывает заранее известно, что функция распределения $F(x)$ *принадлежит к определенному классу функций распределения, зависящих от одного или нескольких параметров:* $F(x) = F(x, a_1, a_2, \ldots, a_n)$. *В этом случае определение неизвестной функции распределения сводится к оценке неизвестных параметров по результатам выборки. Следует заметить, что ни при каких n нельзя определить по выборке точное значение неизвестного параметра, а можно найти его приближенное значение, которое называется оценкой по выборке неизвестного параметра. Всякая оценка по выборке является функцией* $a^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *от выборочных значений* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *так как она меняется от выборки к выборке. Функцию* $a^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *подбирают так, чтобы случайная величина* a^* *по возможности более точно аппроксимировала неслучайное неизвестное число а.*

Для выполнения данного условия накладывают следующие требования на оценку: ***несмещенность*** *оценки, ее эффективность и состоятельность. Наиболее часто применяемыми метода получения оценок являются метод моментов и метод максимального правдоподобия.*

Несмещенной и состоятельной оценкой математического ожидания $M(X)$ является выборочная средняя $\bar{x}_в$.

Несмещенная и состоятельная оценка S^2 ***дисперсии*** $D(X)$ вычисляется по формуле:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_в)^2 = \frac{n}{n-1} D_в.$$

где S^2 – *исправленная дисперсия.*

Для оценки среднего квадратического отклонения σ используется величина S, равная квадратному корню из исправленной дисперсии, которая называется *исправленным средним квадратическим отклонением*.

Рассмотренные оценки характеризуются одним числом и называются ***точечными***.

Пример 1. По заданному статистическому ряду (табл. 1) требуется:

а) построить гистограмму относительных частот;

б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;

в) построить эмпирическую функцию распределения.

Таблица 1

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30

n_i	2	6	12	19	7	4

Решение

а) Объем выборки $n = 2 + 6 + 12 + 19 + 7 + 4 = 50$.

Определяем относительные частоты $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ и составляем табл. 2 с относительными частотами:

Таблица 2

x_i - x_{i+1}	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Для построения гистограммы относительных частот на оси абсцисс откладываются частичные интервалы длины $h = 3$, а над ними проводятся горизонтальные отрезки на расстоянии $y_i = \dfrac{w_i}{3}$ (рис. 1).

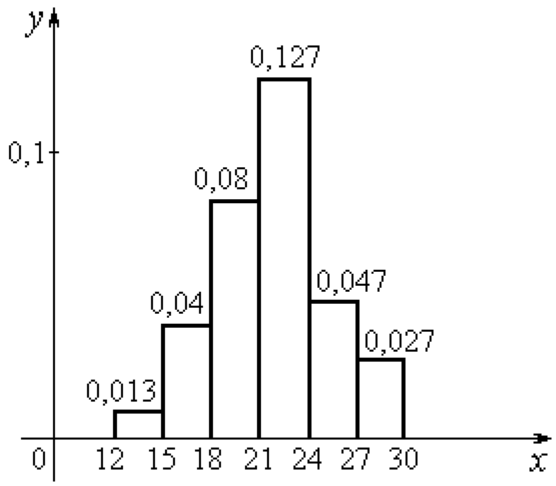


Рис. 1

б) Перейдем к вариантам, положив их равными серединам частичных интервалов $\hat{x}_i = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$, где x_i, x_{i+1} – концы интервалов. Тогда табл. 2 превратится в табл. 3:

Таблица 3

x_i	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,04	0,12	0,24	0,38	0,14	0,08

Отметим на плоскости точки (x_i, w_i), $(i = \overline{1, 6})$ и, соединив соседние точки, получим полигон относительных частот (рис. 2).

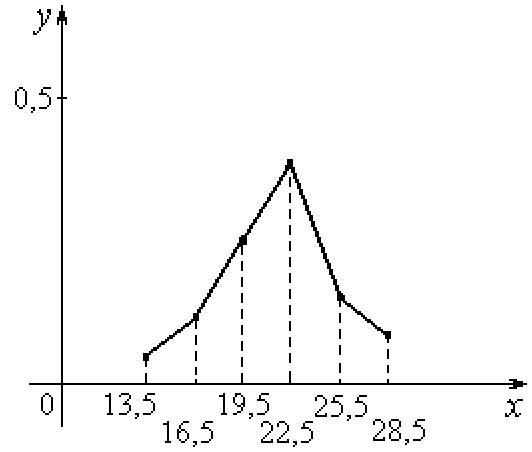


Рис. 2

в) Эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ строится по закону:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 \quad при \;\; x \le x_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} w_i \; при \; x_l < x \le x_{l+1} \; (l=1,2,...,k-1), \\ 1 \quad при \;\; x > x_k.\end{cases}$$

В нашем случае получаем:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & при \quad x \le 13{,}5, \\ 0{,}04 & при \;\; 13{,}5 < x \le 16{,}5, \\ 0{,}16 & при \;\; 16{,}5 < x \le 19{,}5, \\ 0{,}40 & при \;\; 19{,}5 < x \le 22{,}5, \\ 0{,}78 & при \;\; 22{,}5 < x \le 25{,}5, \\ 0{,}92 & при \;\; 25{,}5 < x \le 28{,}5, \\ 1 & при \quad x > 28{,}5.\end{cases}$$

График функции $F^*(x)$ представлен на рис. 3.

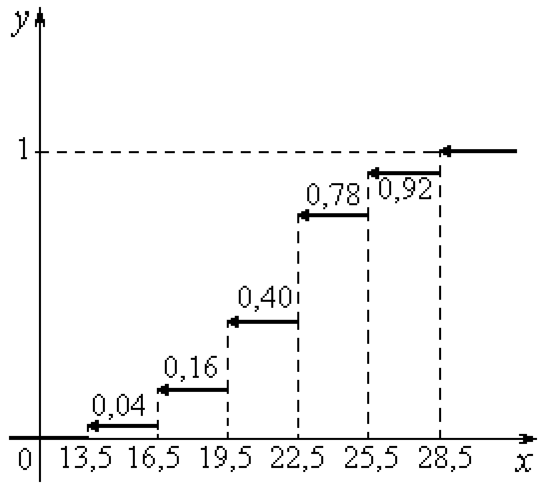


Рис. 3

Пример 2. В условиях примера 1 найти статистические оценки.
Решение Обратимся к табл. 3: $\overline{x}_в = 21{,}6$; $D_в(x) = 13{,}05$; $\sigma_в(x) = 3{,}6$.

Варианты заданий
Решить задачи

Статистический ряд задан таблицей. Требуется:
а) построить гистограмму относительных частот;
б) перейти к вариантам и построить полигон относительных частот;
в) записать эмпирическую функцию распределения и построить ее график;
г) найти точечные оценки $\overline{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$;

1.

(–6; –4)	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)
2	6	17	18	4	3

2.

(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)	(10; 12)
1	3	19	21	4	2

3.

(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)
3	8	14	15	9	1

4.

(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)
1	4	20	19	4	2

Самостоятельная работа №18 Интервальное оценивание математического ожидания нормального распределения при известной (неизвестной)дисперсии, интервальное оценивание вероятности события

Цель: получить навыки по решению задач на нтервальное оценивание математического ожидания нормального распределения при известной (неизвестной)дисперсии, интервальное оценивание вероятности события

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

План:

1. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения.
2. Интервальная оценка среднего квадратического отклонения нормального распределения.
3. Интервальная оценка вероятности события

Определение*: Интервальной* называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Так как любая оценка a^* есть некоторое приближение оцениваемой величины *а*, то возникает вопрос об оценке точности данного приближения, т. е. можно ли утверждать, что $|a^* - a| < \delta$ для некоторого $\delta > 0$.

Однако статистические методы не позволяют категорически утверждать, что оценка a^* удовлетворяет неравенству $|a^* - a| < \delta$. Можно лишь говорить о вероятности γ наступления события, заключающегося в том, что мы получили оценку с точностью *δ*: $P(|a^* - a| < \delta) = \gamma$. Эта вероятность называется ***доверительной вероятностью*** (или *надежностью*), а интервал $(a^* - \delta; a^* + \delta)$ – ***доверительным интервалом***. Вероятность того, что интервал $a^* - \delta < a < a^* + \delta$ заключает в себе неизвестный параметр *а*, равна *γ*. Обычно надежность выбирают близкой к единице (0,95; 0,99; 0,999).

1. Интервальная оценка математического ожидания нормального распределения

Если случайная величина распределена нормально и среднее квадратическое отклонение σ <u>известно</u>, то доверительный интервал для оценки математического ожидания a

$$\bar{x}_в - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (1)$$

где n – объем выборки, t находится из равенства $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице значений функции Лапласа $\Phi(t)$.

Если σ <u>неизвестно</u>, то в формуле (1) оно заменяется на исправленное среднее квадратическое отклонение S, t заменяется на $t_\gamma = t(\gamma, n)$, которое находится по таблице (приложение)

$$\bar{x}_в - \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_в + \frac{t_\gamma S}{\sqrt{n}}. \qquad (2)$$

2. Интервальная оценка среднего квадратического отклонения нормального распределения

Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения σ нормального распределения с заданной надежностью γ находится по формуле

$$S(1 - q) < \sigma < S(1 + q), \qquad (3)$$

где $q = q(\gamma, n)$ находится по таблице (приложение).

<u>Пример 1.</u> Дано распределение частот выборки (табл. 1). Найти доверительные интервалы для математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ с доверительной вероятностью $\gamma = 0{,}95$, если известно, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону

Таблица 1

$x_i - x_{i+1}$	12 –15	15 – 18	18 – 21	21 – 24	24 – 27	27 – 30
n_i	2	6	12	19	7	4

<u>Решение</u>

Имеем: $\bar{x}_в = 21{,}6$, $D_в = 13{,}05$, $\sigma_в = 3{,}6$. Так как объем выборки $n = 50$, то находим

$$S = \sqrt{\frac{50}{49} \cdot 13{,}05} = 3{,}64.$$

По таблице приложения находим

$$t_\gamma = t(0{,}95;\ 50) = 2{,}009.$$

Подставляя полученные значения S и t_γ в формулу (2), получим

$$21{,}6 - \frac{2{,}009 \cdot 3{,}64}{\sqrt{50}} < a < 21{,}6 + \frac{2{,}009 \cdot 3{,}64}{\sqrt{50}}$$

или

$$20{,}56 < a < 22{,}64.$$

По таблице приложения найдем $q = q(0{,}95;\ 50) = 0{,}21$.

Подставляя значения S и q в формулу (3), получим

$$3{,}64 \cdot (1 - 0{,}21) < \sigma < 3{,}64 \cdot (1 + 0{,}21)$$

или

$$2{,}87 < \sigma < 4{,}40.$$

3.Интервальная оценка вероятности события

Интервальной оценкой (с надежностью γ) неизвестной вероятности p биномиального распределения по относительной частоте ω служит доверительный интервал (с приближенными концами p_1 и p_2) $p_1 < p < p_2$,

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right),$$

где

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right)$$

n- общее число испытаний;
m- число появления события;
ω - относительная частота, равная отношению m/n;
t- значение аргумента функции Лапласа, при котором $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. ($\gamma$ - заданная надежность).

Замечание: При больших значениях n (порядка сотен) можно принять в качестве приближенных границ доверительного интервала

$$p_1 = \omega - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}},$$

$$p_2 = \omega + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Пример: Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события A в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 60 испытаниях событие A появилось 15 раз.

Решение: По условию, n=60, m=15, γ=0.95. Найдем относительную частоту появления события A: $\omega = \frac{m}{n} = \frac{15}{60} = 0.25$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$. По таблице функции Лапласа находим t=1,96.

Найдем границы искомого доверительного интервала:

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} - t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right),$$

$$p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(\omega + \frac{t^2}{2n} + t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n} + \left(\frac{t^2}{2n}\right)^2}\right)$$

Подставив в эти формулы n=60, $\omega = 0.25$, t=1,96, получим p_1=0,16, p_2=0,37.
Итак, искомый доверительный интервал $0.16 < p < 0.37$.

Пример: Изготовлен экспериментальный игровой автомат, который должен обеспечить появление выигрыша в одном случае из 100 бросаний монеты в автомат. Для проверки пригодности автомата произведено 400 испытаний, причем выигрыш появился 5 раз. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестную вероятность появления выигрыша с надежностью γ=0.999.

Решение: Найдем относительную частоту появления выигрыша $\omega = \frac{m}{n} = \frac{5}{400} = 0.0125$.

Найдем t из соотношения $\Phi(t)=\frac{\gamma}{2}=\frac{0.999}{2}=0.4995$. По таблице функции Лапласа находим t=3,3.
Учитывая, что n=400 велико, используем для отыскания границ доверительного интервала приближенные формулы: $p_1=\omega-t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$, $p_2=\omega+t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$.
Подставив в эти формулы n=400, $\omega=0.0125$, t=3,3,
получим p_1= -0,0058, p_2= 0,0308.
Итак, искомый доверительный интервал $0<p<0.0308$.

Варианты заданий

Решить задачи

Считая генеральную совокупность нормальной, найти интервальные оценки для σ и a с надежностью 0,95.

1.

(1; 3)	(3; 5)	(5; 7)	(7; 9)	(9; 11)	(11; 13)
3	5	16	17	6	3

2.

(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)	(10; 12)
2	4	18	17	6	3

3.

(–8; –6)	(–6; –4)	(–4; –2)	(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)
1	4	21	19	3	2

4.

(5; 7)	(7; 9)	(9; 11)	(11; 13)	(13; 15)	(15; 17)
1	5	18	19	4	3

5.

(–2; 0)	(0; 2)	(2; 4)	(4; 6)	(6; 8)	(8; 10)
2	9	15	13	8	3

6. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события А в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,99, если в 100 испытаниях событие А появилось 60 раз.
7. Производятся независимые испытания с одинаковой, но неизвестной вероятностью p появления события А в каждом испытании. Найти доверительный интервал для оценки вероятности p с надежностью 0,95, если в 300 испытаниях событие А появилось 250 раз.

Самостоятельная работа №19 Подготовка сообщения «Практические приложения математической статистики»

Цель: получить представление о практических приложениях математической статистики
Самостоятельная работа: работа с литературой
Форма контроля: сообщение на уроке

Самостоятельная работа №20 Моделирование случайных величин

Цель: получить навыки по моделированию случайных величин
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

План:
1. Разыгрывание ДСВ.
2. Разыгрывание полной группы событий.
3. Разыгрывание НСВ.

Моделирование (разыгрывание) с.в. проводится методом Монте-Карло.

Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение а некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают с.в.X, математическое ожидание которой равно а: M(X)=a.

Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений x_i с.в.X, находят их среднее арифметическое $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ и принимают $\bar{x}$ в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа а: $a \cong a^* = \bar{x}$.

1.Разыгрывание ДСВ

ПРАВИЛО: Для того, чтобы разыграть ДСВ X, заданную законом распределения

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

надо:
1. Разбить интервал (0,1) оси Or на n частичных интервалов: $\Delta_1 - (0; p_1)$, $\Delta_2 - (p_1; p_1 + p_2), \ldots$, $\Delta_n - (p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}; 1)$,
2. Выбрать (например, из таблицы случайных чисел) случайное число r_j.

Если r_j попало в частичный интервал Δ_i, то разыгрываемая величина приняла возможное значение x_i.

ПРИМЕР: Разыграть шесть возможных значений ДСВ X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

Решение:
1. Разобьем интервал (0,1) оси Or точками с координатами 0,22: 0,22+0,17=0,39 на три частичных интервала: $\Delta_1 - (0;0{,}22)$, $\Delta_2 - (0{,}22;0{,}39)$, $\Delta_3 - (0{,}39;1)$.
2. Выпишем из таблицы случайных чисел (приложение) шесть случайных чисел, например 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87 (пятая строка снизу).

Случайное число r_1=0.32 принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая ДСВ приняла возможное значение x_2=10; случайное число r_2=0.17 принадлежит частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая ДСВ приняла возможное значение x_1=2.
Аналогично получим остальные возможные значения.
Итак, разыгранные возможные значения таковы: 10; 2; 18; 2; 18; 18.

2.Разыгрывание полной группы событий

Требуется разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы, вероятности которых известны. Разыгрывание полной группы событий сводится к разыгрыванию ДСВ.

ПРАВИЛО: Для того, чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий A_1, A_2,…,A_n полной группы, вероятности которых p_1, p_2, …, p_n известны, достаточно разыграть (по правилу для ДСВ) ДСВ X со следующим законом распределения:

X	1	2	…	n
p	p_1	p_2	…	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение x_i=i., то наступило событие A_i.

ПРИМЕР: Заданы вероятности трех событий: A_1, A_2, A_3, образующих полную группу: $p_1=P(A_1)=0{,}22$, $p_2=P(A_2)=0{,}31$, $p_3=P(A_3)=0{,}47$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

Решение:

В соответствии с правилом надо разыграть ДСВ X с законом распределения

X	1	2	3
p	0,22	0,31	0,47

По правилу для ДСВ разобьем интервал (0,1) на три частичных интервала: Δ_1 - (0;0,22), Δ_2 - (0,22;0,43), Δ_3 - (0,43;1).

Выпишем из таблицы случайных чисел (приложение) пять случайных чисел, например 0,61; 0,19; 0,69; 0,04; 0,46.

Случайное число r_1=0.61 принадлежит частичному интервалу Δ_3 , X=3 и, следовательно, наступило событие A_3.

Аналогично найдем остальные события.

Получим последовательность событий: A_3, A_1, A_3, A_1, A_3.

3.Разыгрывание НСВ

Известна функция распределения F(x) НСВ X. Требуется разыграть X, т.е. вычислить последовательность возможных значений x_i.

Метод обратных функций:

ПРАВИЛО 1: Для того, чтобы разыграть возможное значение x_i НСВ X, зная ее функцию распределения F(x), надо выбрать случайное число r_i , приравнять его функции распределения и решить относительно x_i полученное уравнение $F(x_i)=r_i$,

Если известна плотность вероятности f(x) , то используют правило 2.

ПРАВИЛО 2: Для того, чтобы разыграть возможное значение x_i НСВ X, зная ее плотность вероятности f(x), надо выбрать случайное число r_i и решить относительно x_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_i} f(x)dx = r_i \text{, или уравнение } \int_{a}^{x_i} f(x)dx = r_i \text{,}$$

где а – наименьшее конечное возможное значение X.

ПРИМЕР: Найти явную формулу для разыгрывания равномерно распределенной с.в. X, заданной плотностью вероятности $f(x)=b/(1+ax)^2$ в интервале (0;1/(b-a)); вне этого интервала f(x)=0.

Решение:

Используем правило 2, напишем уравнение $b\int_0^{x_i} 1/(1+ax)^2\,dx = r_i$.

Решив это уравнение относительно x_i , окончательно получим $x_i = r_i/(b - ar_i)$.

Варианты заданий

Решить задачи

1. Разыграть шесть возможных значений ДСВ X, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	3	6	9
p	0,2	0,3	0,5

2. Заданы вероятности трех событий: A_1, A_2, A_3, образующих полную группу: $p_1=P(A_1)=0{,}2$, $p_2=P(A_2)=0{,}3$, $p_3=P(A_3)=0{,}54$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.
3. Разыграть четыре возможных значения НСВ X, распределенной равномерно в интервале(7;17).
4. Найти явную формулу для разыгрывания равномерно распределенной с.в. X, заданной плотностью вероятности f(x)=2 в интервале (0;0,5); вне этого интервала f(x)=0.

<u>Самостоятельная работа №21 Подготовка сообщения «Моделирование случайных величин»</u>

Цель: расширить знания о моделировании случайных величин

Самостоятельная работа: работа с литературой

Форма контроля: сообщение на уроке

<u>Самостоятельная работа №22 Работа в современных пакетах прикладных программ многомерного статистического анализа</u>

Цель: получить навыки по работе в современных пакетах прикладных программ многомерного статистического анализа

Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа

Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

1. Основные статистические характеристики.

Электронные таблицы *Excel* имеют огромный набор средств для анализа статистических данных. Наиболее часто используемые статистические функции встроены в основное ядро программы, то есть эти функции доступны с момента запуска программы. Другие более специализированные функции входят в дополнительную подпрограмму, называемую пакетом анализа. Команды и функции пакета анализа называют Инструментами анализа. Мы ограничимся изучением нескольких основных встроенных статистических функций и наиболее полезных инструментов анализа из пакета.

<u>Среднее значение.</u>

Функция СРЗНАЧ (или AVERAGE) вычисляет выборочное (или генеральное) среднее, то есть среднее арифметическое значение признака выборочной (или генеральной) совокупности. Аргументом функции СРЗНАЧ является набор чисел, как правило, задаваемый в виде интервала ячеек, например, =СРЗНАЧ (А3:А201).

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение.

Для оценки разброса данных используются такие статистические характеристики, как дисперсия D и среднее квадратическое (или стандартное) отклонение σ. Стандартное отклонение есть квадратный корень из дисперсии: $D=\sqrt{\sigma}$. Большое стандартное отклонение указывает на то, что значения измерения сильно разбросаны относительно среднего, а малое – на то, что значения сосредоточены около среднего.

В *Excel* имеются функции, отдельно вычисляющие выборочную дисперсию $D_в$ и стандартное отклонение $\sigma_в$ и генеральные дисперсию $D_г$ и стандартное отклонение $\sigma_г$. Поэтому, прежде чем вычислять дисперсию и стандартное отклонение, следует четко определиться, являются ли ваши данные генеральной совокупностью или выборочной. В зависимости от этого нужно использовать для расчета $D_г$ и $\sigma_г$, $D_в$ и $\sigma_в$.

Для вычисления выборочной дисперсии $D_в$ и выборочного стандартного отклонения $\sigma_в$ имеются функции ДИСП (или VAR) и СТАНДОТКЛОН (или STDEV). Аргументом этих функций является набор чисел, как правило, заданный диапазоном ячеек, например, =ДИСП (В1:В48).

Для вычисления генеральной дисперсии $D_г$ и генерального стандартного отклонения $\sigma_г$ имеются функции ДИСПР (или VARP) и СТАНДОТКЛОНП (или STDEVP), соответственно.

Аргументы этих функций такие же как и для выборочной дисперсии.

Объем совокупности.

Объем совокупности выборочной или генеральной – это число элементов совокупности. Функция СЧЕТ (или COUNT) определяет количество ячеек в заданном диапазоне, которые содержат числовые данные. Пустые ячейки или ячейки, содержащие текст, функция СЧЕТ пропускает. Аргументом функции СЧЕТ является интервал ячеек, например: =СЧЕТ (С2:С16).

Для определения количества непустых ячеек, независимо от их содержимого, используется функция СЧЕТЗ. Ее аргументом является интервал ячеек.

Мода и медиана.

Мода – это значение признака, которое чаще других встречается в совокупности данных. Она вычисляется функцией МОДА (или MODE). Ее аргументом является интервал ячеек с данными.

Медиана – это значение признака, которое разделяет совокупность на две равные по числу элементов части. Она вычисляется функцией МЕДИАНА (или MEDIAN). Ее аргументом является интервал ячеек.

Размах варьирования. Наибольшее и наименьшее значения.

Размах варьирования R – это разность между наибольшим x_{max} и наименьшим x_{min} значениями признака совокупности (генеральной или выборочной): $R=x_{max}–x_{min}$. Для нахождения наибольшего значения x_{max} имеется функция МАКС (или MAX), а для наименьшего x_{min} – функция МИН (или MIN). Их аргументом является интервал ячеек. Для того, чтобы вычислить размах варьирования данных в интервале ячеек, например, от А1 до А100, следует ввести формулу: =МАКС (А1:А100)-МИН (А1:А100).

Отклонение случайного распределения от нормального.

Нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике, например, результаты измерения любой физической величины подчиняются нормальному закону распределения. Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где σ - дисперсия, $\bar{x}$ - среднее значение случайной величины x.

Для оценки отклонения распределения данных эксперимента от нормального распределения используются такие характеристики как асимметрия A и эксцесс E. Для нормального распределения A=0 и E=0.

Асимметрия показывает, на сколько распределение данных несимметрично относительно нормального распределения: если A>0, то большая часть данных имеет значения, превышающие среднее $\overline{x}$; если A<0, то большая часть данных имеет значения, меньшие среднего $\overline{x}$. Асимметрия вычисляется функцией СКОС. Ее аргументом является интервал ячеек с данными, например, =СКОС (A1:A100).

Эксцесс оценивает «крутость», т.е. величину большего или меньшего подъема максимума распределения экспериментальных данных по сравнению с максимумом нормального распределения. Если E>0, то максимум экспериментального распределения выше нормального; если E<0, то максимум экспериментального распределения ниже нормального. Эксцесс вычисляется функцией ЭКСЦЕСС, аргументом которой являются числовые данные, заданные, как правило, в виде интервала ячеек, например: =ЭКСЦЕСС (A1:A100).

Варианты заданий

Задание 1

Одним и тем же вольтметром было измерено 25 раз напряжение на участке цепи. В результате опытов получены следующие значения напряжения в вольтах: 32, 32, 35, 37, 35, 38, 32, 33, 34, 37, 32, 32, 35, 34, 32, 34, 35, 39, 34, 38, 36, 30, 37, 28, 30. Найдите выборочные среднюю, дисперсию, стандартное отклонение, размах варьирования, моду, медиану. Проверить отклонение от нормального распределения, вычислив асимметрию и эксцесс.

1. Наберите результаты эксперимента в столбец A.
2. В ячейку B1 наберите «Среднее», в B2 – «выборочная дисперсия», в B3 – «стандартное отклонение», в B4 – «Максимум», в B5 – «Минимум», в B6 – « Размах варьирования», в B7 – «Мода», в B8 – «Медиана», в B9 – «Асимметрия», в B10 – «Эксцесс». Выровняйте ширину этого столбца с помощью *Автоподбора* ширины.
3. Выделите ячейку C1 и нажмите на знак «=» в строке формул. С помощью *Мастера функций* в категории *Статистические* найдите функцию СРЗНАЧ, затем выделите интервал ячеек с данными и нажмите *Enter*.
4. Выделите ячейку C2 и нажмите на знак «=» в строке формул. С помощью помощью *Мастера функций* в категории *Статистические* найдите функцию ДИСП, затем выделите интервал ячеек с данными и нажмите *Enter*.
5. Проделайте самостоятельно аналогичные действия для вычисления стандартного отклонения, максимума, минимума, моды, медианы, асимметрии и эксцесса.
6. Для вычисления размаха варьирования в ячейку C6 следует ввести формулу: =МАКС (A1:A25)-МИН(A1:A25).

2. Инструменты статистического анализа: *Генерация случайных чисел, Гистограмма, Описательная статистика*.

Загрузка *Пакета анализа*.

Пакет анализа без дополнительных установок автоматически не загружается при запуске *Excel*. Он входит в так называемую *Надстройку* – набор дополнительных подпрограмм, к которым относятся, например, уже известные вам *Мастер диаграмм* и *Мастер функций*. Для загрузки *Пакет анализа* необходимо:

1) в *Основном меню* выбрать пункт *Сервис*;
2) выбрать пункт *Надстройки*;
3) в появившемся списке *Надстроек* активизировать переключатель *AnalysisToolPak-VBA* и нажать ОК.

После этого в меню *Сервис* добавится пункт *Анализ данных*. К этому пункту следует обращаться для вызова *Пакета анализа*.

Инструмент: *Генерация случайных чисел*.

В *Excel* имеется встроенная функция СЛЧИСЛ (или RAND) для генерации равномерно распределенных случайных чисел в интервале [0,1].

Пакет анализа позволяет генерировать случайные числа с различными типами распределений: равномерное, нормальное, Бернулли, биномиальное, Пуассона и дискретное (определенное пользователем). Для генерации случайных чисел следует:

1) в меню *Сервис* выбрать команду *Анализ данных*;
2) в появившемся диалоговом окне *Анализ данных* в группе *Инструменты анализа* выбрать пункт *Генерация случайных величин* и нажать *ОК*;
3) в появившемся диалоговом окне *Генерация случайных чисел* следует заполнить поля ввода:

- в полях *Число переменных* и *Число случайных чисел* указать нужное количество столбцов и сколько чисел вы хотите получить в каждом столбце;
- в поле *Распределение* следует выбрать один из имеющихся типов распределения случайных чисел;
- в группе *Параметры* следует указать диапазон чисел, т.е. min и max числа распределения для *Равномерного распределения*; или среднее значение и стандартное отклонение для *Нормального распределения* и т.д.
- поле *Случайное* рассеивание заполняется только в том случае, если вам необходимо несколько раз воспроизводить одну и туже последовательность случайных чисел;
- в поле *Выходной интервал* указывается место, куда следует поместить последовательность чисел, как правило, это интервал ячеек (или столбец целиком).

Инструмент: *Гистограмма*.

Графическое представление результатов обработки статистических данных обычно оформляется в виде гистограммы. Совокупность данных разбивается на частичные интервалы, называемые нормальными. Интервалы разбиения могут быть любой ширины, но обязательно они должны следовать в порядке возрастания. Интервалы разбиения откладываются по оси абсцисс гистограммы. На оси ординат гистограммы откладывается число значений, попавших в интервал разбиения. Это число значений признака совокупности называется частотой. Для построения гистограммы:

1) в начале следует задать частичные интервалы разбиения;
2) затем в меню *Сервис* выбрать команду *Анализ данных* и указать инструмент анализа –*Гистограмма* и нажать *ОК*;
3) в диалоговом окне *Гистограмма* следует указать:

- в группе *Входные данные* в поле *Входной интервал* – интервал ячеек с данными, а в поле *Интервал карманов* – интервал ячеек с частичными интервалами разбиения;
- в группе *Параметры вывода* указывается интервал ячеек для вывода частот и отмечается галочкой переключатель *Вывод графика*.

После нажатия *ОК* инструмент *Гистограмма* выводит два столбца: карман и частота. Сама гистограмма выводится правее столбца частот. Форматирование гистограммы производится так же, как и любой диаграммы в *Excel* (см. лабораторную работу №6).

Инструмент: *Описательная статистика*.

В пакете анализа *Excel* содержится инструмент *Описательная статистика*, который создает таблицу основных статистических характеристик для совокупности данных. В этой таблице будут содержаться следующие характеристики: среднее, стандартная ошибка, дисперсия, стандартное отклонение, мода, медиана, размах варьирования интервала, максимальное и минимальное значения, асимметрия, эксцесс, объем совокупности, сумму всех элементов совокупности, доверительный интервал (уровень надежности). Инструмент *Описательная статистика* существенно упрощает статистический анализ тем, что нет необходимости вызывать каждую функцию для расчета статистических характеристик отдельно.

Для того, чтобы вызвать *Описательную статистику*, следует:

1) в меню *Сервис* выбрать команду *Анализ данных*;

2) в списке *Инструменты анализа* диалогового окна *Анализ данных* выбрать инструмент *Описательная статистика* и нажать *ОК*;

3) в появившемся диалоговом окне *Описательная статистика* необходимо:

- в группе *Входные данные* в поле *Входной интервал* указать интервал ячеек, содержащих данные;
- если первая строка во входном диапазоне содержит заголовок столбца, то в *поле Метки в первой строке* следует поставить галочку;
- активизировать переключатель (поставить галочку) *Итоговая статистика*, если нужен полный список характеристик;
- активизировать переключатель *Уровень надежности* и указать надежность в %, если необходимо вычислить доверительный интервал.

Задание 2.

Сгенерировать 500 случайных чисел, распределенных нормально. Построить гистограмму и полный список статистических характеристик с помощью *инструмента Описательная статистика*.

1. Выполните команду *Сервис→Анализ данных→Генерация случайных чисел*;

2..В диалоговом окне *Генерация случайных* чисел введите в поле число переменных: 1; в поле Число случайных чисел 500; выберите *Распределение Нормальное*; задайте любое среднее значение (желательно около 100) и небольшое стандартное отклонение (не больше 10); в поле Выходной интервал укажите абсолютный адрес столбца A2. Нажмите ОК.

1. Теперь постройте гистограмму по совокупности случайных чисел. Сначала нужно задать интервалы решения. Пусть длины интервалов будут одинаковыми и равны 3. Для автоматического составления интервалов разбиения наберите в ячейку В2 начальное число, например, 75 для наших случайных чисел. Затем выполните команду *Правка→Заполнить→Прогрессия*. В появившемся диалоговом окне заполните данные:
   - в группе переключателей поле *Расположение* установите *по столбцам*;
   - в поле *Шаг* наберите 3;
   - в поле *Предельное значение* наберите 125;
   - в группе переключателей *Тип* установите *арифметическая* и нажмите ОК.

   В результате столбец В будет содержать интервалы разбиения (карманы).
2. Выполните команду *Сервис→Анализ данных→Гистограмма*. В появившемся диалоговом окне *Гистограмма* заполните:
   - входной интервал появится, если щелкнуть мышью по столбцу А;
   - интервал карманов появится, если щелкнуть мышью по столбцу В;
   - поставьте галочку в поле метки;
   - укажите столбец С в поле *Выходной интервал*;
   - активизируйте переключатель *Вывод графика*; если это поле не содержит галочки, нажмите ОК.
3. Построение гистограммы займет от 5 до 10 минут. За это время письменно ответьте на контрольные вопросы. В результате вычисления получатся столбец под названием *Карман*, который дублирует ваш столбец интервалов разбиения, и столбец под название *Частота* с рассчитанными частотами. После того, как появилась гистограмма, измените ее размеры с помощью мыши так, чтобы хорошо были видны все столбцы и подписи.

4. Теперь осталось получить таблицу статистических характеристик с *помощью Описательной статистики*. Выполните команду *Сервис→Анализ данных→Описательная статистика*. В появившемся диалоговом окне *Описательная статистика* укажите:
   - в поле *Входной интервал* появится адрес, если выделить мышью интервал сданными или с клавиатуры набрать адрес A2: A501;
   - в поле *Группирование* активизировать переключатель *по столбцам*;
   - активизировать переключатель *Метки в первой строке*;
   - в группе *Параметры вывода* укажите *Выходной интервал*, щелкнув мышью по какой-либо пустой ячейке ниже столбца частот, например, по С 25;
   - активизируйте переключатель *Итоговая статистика* (если в этом поле нет галочки);
   - активизируйте переключатель *Уровня надежности* и установите 95%;
   - снимите галочки с полей *наименьший* и *наибольший* и нажмите ОК.

Результаты записать в отчет.

Самостоятельная работа №23 Распознавание мостов и разделяющих вершин в графе, нахождение расстояния между вершинами в графе; проверка графа на двудольность; проверка пары графов на изоморфность

Цель: получить навыки по распознаванию мостов и разделяющих вершин в графе, нахождению расстояния между вершинами в графе; проверке графа на двудольность; проверке пары графов на изоморфность
Самостоятельная работа: индивидуальная домашняя работа
Форма контроля: проверка работы

Теоретический материал и методические указания к выполнению заданий

План:
1. Введение
2. Основные понятия и определения теории графов
3. Некоторые типы графов

1. Введение

Основу теории графов составляет совокупность методов и представлений, сформировавшихся при решении конкретных задач.

Термин «граф» впервые появился в книге выдающегося венгерского математика Д. Кёнига в 1936 г., хотя начальные задачи теории графов восходят еще к Эйлеру (XVIII в.). Одна из задач, положивших начало теории графов, – задача о кенигсбергских мостах (*рассказать, показать граф*).

Граф есть совокупность точек и линий, соединяющих эти точки. Эти соединения могут обладать различными характеристиками, и теория графов занимается изучением этих характеристик. Граф характеризует отношения между множествами объектов.

Большое значение в теории графов имеет проблема разрешимости: найти эффективный или хотя бы достаточно простой в практически важных случаях алгоритм решения задачи.

В последнее время теория графов принимает все более прикладной характер, являясь эффективным аппаратом для формализации множества задач, связанных с дискретным размещением объектов. К ним, в частности, относятся: проектирование и исследование сетей связи, анализ электрических цепей, графы потока сигналов и теория обратной связи, блок-схемы программы, исследование автоматов, анализ и синтез логических цепей, задачи календарного планирования, планирование и обеспечение материально-технического снабжения, поиск информации, стратегия инвестиций, анализ качества, исследование движения транспорта, размещение предприятий коммунального обслуживания, моделирование, экономические задачи, теория игр, головоломки, доказательство теорем.

2. Основные понятия и определения теории графов

Определение: Пусть задано некоторое конечное множество X, элементы которого будем называть вершинами, и множество V, состоящее из пар элементов (x_i, x_j) множества X. Упорядоченная пара множеств $G=(X,V)$ называется графом. Вершины изображаются точками, а пары элементов – линиями, соединяющими точки, соответствующие образующим пары вершинам.

Если в определении графа существенно в каком порядке выбираются вершины (то есть пара (x_i, x_j) отлична от пары (x_j,x_i)), то такой граф называют ориентированным или орграфом, а пару (x_i, x_j) – дугой, при этом считается, что x_i –начальная вершина, а x_j – конечная. В геометрической интерпретации дуге соответствует направленный отрезок. Часто орграф задают парой $G=(X,\Gamma)$, где X – множество вершин, а Γ – неоднозначное отображение, ставящее в соответствие каждой вершине подмножество в X. $\Gamma(x_i)$ – множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_i, x_j). $\Gamma^{-1}(x_i)$ – множество вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_j, x_i).

Если в определении графа не существенен порядок вершин при образовании пары (x_i, x_j), то граф называют неориентированным или неорграфом, а пару (x_i , x_j) – ребром.

Число вершин графа называется его порядком.

Пример. На рис.1 изображен ориентированный граф $G=(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_3)\})$, а на рис.2 – неориентированный граф.

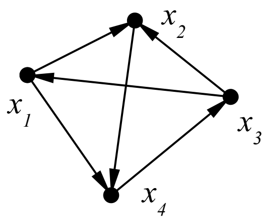


Рис. 1

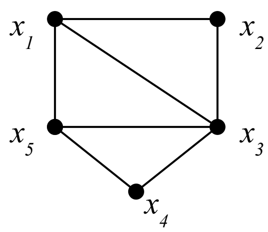


Рис. 2

Определение: **Путем** в графе G называется такая последовательность дуг, в которой конец каждой предыдущей дуги совпадает с началом следующей. Для неорграфа такая последовательность ребер называется **цепью**. Если путь (цепь) проходит через вершины $x_1, ..., x_k$ то будем обозначать его (ее) символом $[x_1, …, x_k]$.

Для графа на рис. 1 последовательность дуг (x_1, x_2), (x_2, x_4), (x_4, x_3) является путем и может быть обозначена следующим образом $[x_1, x_2, x_4, x_3]$. Для графа на рис.2 цепью является, например, следующая последовательность ребер (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_4), которую обозначим через $[x_2, x_3, x_5, x_4]$.

Определение: Путь (цепь), у которого(-ой) начальная и конечная вершина совпадают, называется **контуром (циклом)**.

Для графа на рис. 2 циклом является, например, следующая цепь $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$.

Определение: **Простым циклом** графа называется цикл, в котором все вершины различны за исключением начальной и конечной вершины, которые совпадают.

Например, для графа на рис.2 цикл $[x_2, x_3, x_5, x_1, x_2]$ является простым, а цикл $[x_2, x_3, x_4, x_5, x_3, x_1, x_2]$ не является простым.

Определение: **Петлей** называется дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают.

Определение: Граф, полученный из орграфа заменой каждой дуги на ребро, называется **основанием орграфа**.

Пример. На рис.3.б изображен граф, который является основание графа, изображенного на рис.3.а.

Определение: Две вершины x_i и x_j называются **смежными**, если существует соединяющее их ребро (дуга) (x_i, x_j), при этом вершины называются **инцидентными** этому ребру (дуге), а ребро (дуга) – инцидентным(-ой) этим вершинам. Аналогично, два различных ребра (дуги) называются смежными, если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

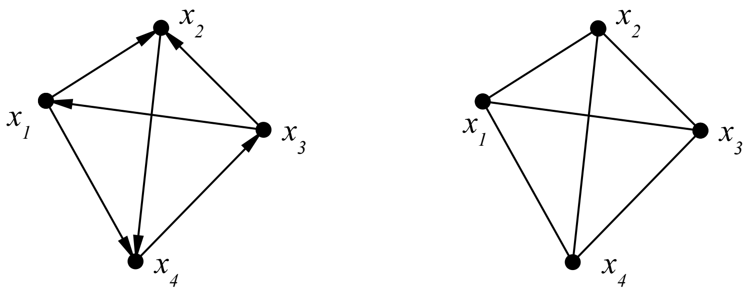


Рис.3 а б

Вершины x_1 и x_4 смежны (рис. 1), дуга (x_1, x_4) инцидентна вершинам x_1 и x_4, а вершины x_1 и x_4 инцидентны дуге (x_1, x_4). Ребра (x_1, x_3) и (x_3, x_4) смежны (рис.2).

Замечание. Смежность есть отношение между однородными элементами графа, тогда как инцидентность является отношением между разнородными элементами.

Определение: Множество всех вершин графа G, смежных с некоторой вершиной x, называется **окружением вершины *x*** и обозначается через $N_G(x)$ или просто $N(x)$.

Определение: В неориентированном графе число ребер, инцидентных данной вершине x_i, называется **степенью (валентностью) вершины x_i** и обозначается $d(x_i)$. Вершина графа, имеющая степень 0, называется **изолированной**, а вершина, имеющая степень 1 – висячей. Для неорграфа на рис.2 $d(x_1)=3$, $d(x_3)=4$.

Утверждение (лемма о рукопожатиях). Сумма степеней вершин графа G равна $2m$, где m – число ребер графа G.

Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, то оно добавляет двойку к сумме степеней графа G. Следовательно, все ребра дают вместе сумму степеней $2m$.

Определение: **Подграфом** графа $G=(X,V)$ называется граф $G'=(X',V')$, для которого $X'\subseteq X$, $V'\subseteq V$, причем ребро (x_i, x_j) содержится в V' только в том случае, если x_i и x_j содержатся в X'. Одним из подграфов графа на рис.1 является следующий (рис..4)

Определение: Если все вершины графа $G=(X,V)$ присутствуют в подграфе $G'=(X',V')$, тогда G' называется **остовным подграфом**, т. е. $X'=X$, $V'\subseteq V$.

Определение: Пусть X' – подмножество вершин X графа $G=(X,V)$. Тогда граф $G'=(X',V')$ называется **порожденным подграфом графа *G*** на множестве вершин X' (вершинно-порожденный подграф), если V' является таким подмножеством V, что ребро (x_i,x_j) входит в V' тогда и только тогда, когда x_i и x_j входят в X'.

Пример. На рис.5 представлен порожденный подграф на множестве вершин $\{x_1, x_3, x_5\}$ неориентированного графа, изображенного на рис2.

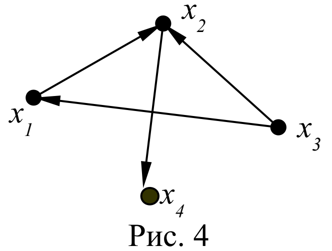


Рис. 4

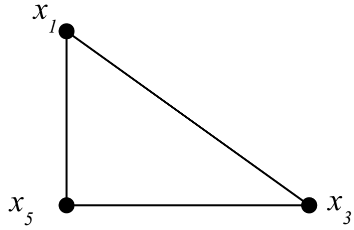


Рис.5

3. Некоторые типы графов

Определение: Граф *G* называется **полным**, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка *n* обозначается символом K_n, число ребер в нем равно $\frac{n(n-1)}{2}$. На рис.6 изображены графы K_n, $n \leq 5$.

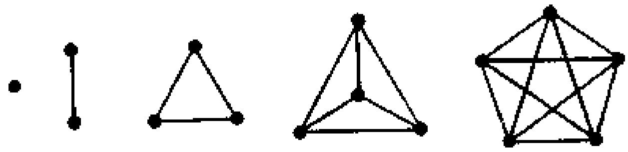


Рис.6

Определение: Граф называется **пустым**, если в нем нет ребер. Пустой граф порядка *n* обозначается через O_n.

Определение: Граф, не содержащий вершин и, следовательно, ребер, называется **ноль-графом.** Граф, состоящий из одной вершины, называется **тривиальным**.

Красивыми примерами являются *графы пяти платоновых тел* (т. е. правильных многогранников): *тетраэдра, куба, октаэдра, додекаэдра, икосаэдра*

Метрические характеристики графов

В теории графов применяются:

1. **Матрица инцинденций**. Это матрица A с n строками, соответствующими вершинам, и m столбцами, соответствующими рёбрам. Для ориентированного графа столбец, соответствующий дуге (x,y) содержит -1 в строке, соответствующей вершине x и 1 в строке, соответствующей вершине y. Во всех остальных – 0. Петлю, т. е. дугу (x,x) можно представлять иным значением в строке x, например, 2. Если граф неориентированный, то столбец, соответствующий ребру (x,y) содержит 1, соответствующие x и y – нули во всех остальных строках.
2. **Матрица смежности**. Это матрица n*n где n – число вершин, где b_{ij} = 1, если существует ребро, идущее из вершины x в вершину y и b_{ij} = 0 в противном случае.
3. Пусть G=(X,U) - связный граф, а x_i и x_j - две его несовпадающие вершины. Длина кратчайшего маршрута, соединяющего вершины x_i и x_j (пути из x_i и x_j) называется *расстоянием* между вершинами x_i и x_j и обозначается $d(x_i,x_j)$. Положим $d(x_i,x_j)=\infty$, если вершины x_i и x_j не соединены маршрутом (путем). Расстояние $d(x_i,x_j)$ удовлетворяет следующим аксиомам:

   1) $d(x_i,x_i)=0$;

   2) $d(x_i,x_j)\geq 0$;

   3) $d(x_i,x_j)=0$ тогда и только тогда, когда $x_i=x_j$;

   4) $d(x_i,x_j)=d(x_j,x_i)$ для симметрических графов;

   5) $d(x_i,x_j)+d(x_j,x_k)\geq d(x_i,x_k)$ (неравенство треугольника).
4. Расстояние для графа G удобно задавать матрицей расстояний. ***Матрицей расстояний*** графа с n вершинами называется квадратная матрица D порядка n, элементы которой определяются следующим образом:

$$d_{ij}=\begin{cases} 0, \text{если } x_i=x_j; \\ d(x_i,x_j), \text{если } x_i\neq x_j. \end{cases}$$

   Матрицу расстояний можно определить

5. Для фиксированной вершины x_i величина

$$e(x_i) = \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

называется ***эксцентриситетом*** (отклоненностью) вершины x_i.

6. Максимальный среди эксцентриситетов вершин называется ***диаметром*** графа G и обозначается diam (G):

$$\mathrm{diam}(G) = \max_{x_i \in X} e(x_i) = \max_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

7. Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа называется его ***радиусом*** и обозначается через r(G):

$$r(G) = \min_{x_i \in X} e(x_i) = \min_{x_i \in X} \max_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

8. Вершина, имеющая минимальный эксцентриситет, называется ***центром*** графа.
9. Для вершины x_i число $P(x_i) = \sum\limits_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$ называется ***передаточным числом***.
10. Вершина графа, которой соответствует минимальное передаточное число

$$\max_{x_i \in X} P(x_i) = \max_{x_i \in X} \sum_{x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

называется ***медианой*** графа. Центров и медиан в графе может быть несколько.

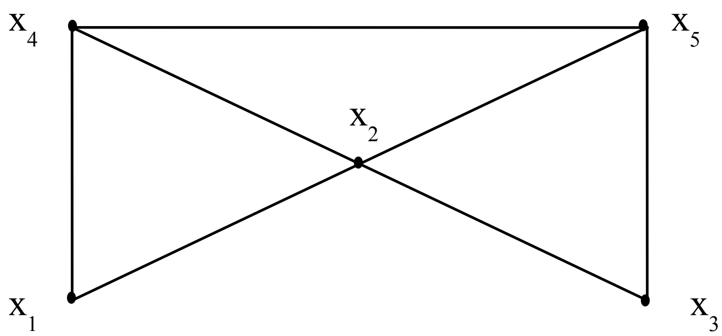


Рис. 1

***<u>Пример</u>*.** Для графа, изображенного на рис.1 метрические характеристики определяются следующим образом:

$$D = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{ll} e(x_1) = 2 & P(x_1) = 6 \\ e(x_2) = 1 & P(x_2) = 4 \\ e(x_3) = 2 & P(x_3) = 6 \\ e(x_4) = 2 & P(x_4) = 5 \\ e(x_5) = 2 & P(x_5) = 5 \end{array}$$

Радиус графа равен 1, диаметр равен 2. Центр графа - вершина x_2; Медиана графа - вершина x_2.

Двудольные графы

Определение: Граф называется ***двудольным,*** если существует такое разбиение множества его вершин на две части *(доли),* что концы каждого ребра принадлежат разным частям.

Если при этом любые две вершины, входящие в разные доли, смежны, то граф называется ***полным двудольным***.

Полный двудольный граф, доли которого состоят из p и из q вершин, обозначается символом $K_{p,q}$. При p=1 получаем *звезду* $K_{1,q}$. На рис.1 изображены звезда $K_{1,5}$ и полный двудольный граф $K_{3,3}$.

Аналогично двудольным графам определяются *k-дольный* и *полный k-дольный* графы для k=3, 4, … На рис.2 приведен трехдольный граф.

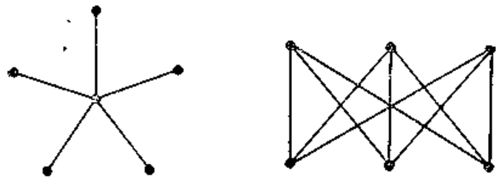


Рис. 1

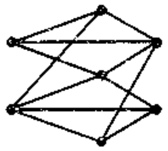


Рис. 2

Для решения примеров удобно применять теорему

Теорема: Граф является двудольным т. и т.т., к. все его простые циклы имеют четную длину.

Легко подсчитать число всех графов с фиксированным множеством вершин X. Эти графы различаются своими ребрами, и потому их число равно количеству подмножеств в $X^{(2)}$, т.е. $2^{\binom{n}{2}}$, где n=|X|. Однако эти графы не всегда следует различать. Как в применениях теории графов, так и в самой этой теории чаще существенно лишь то, что есть объекты (вершины графа) и связи между объектами (ребра). С этих позиций графы, которые получаются один из другого изменением наименований вершин, разумно не различать. Оформим эти соображения в виде следующего определения.

Изоморфные графы

Определение: Два графа G_1 и G_2 называются ***изоморфными***, если существует взаимно-однозначное отображение между множествами их вершин, сохраняющее смежность. Такое отображение называется **изоморфизмом**.

Два орграфа изоморфны, если существует изоморфизм между их основаниями, сохраняющий порядок вершин на каждой дуге.

Например, три графа, представленные на рис. 4, изоморфны, а графы на рис. 5 не изоморфны. Вопрос о том, изоморфны ли два данных графа, в общем случае оказывается сложным.

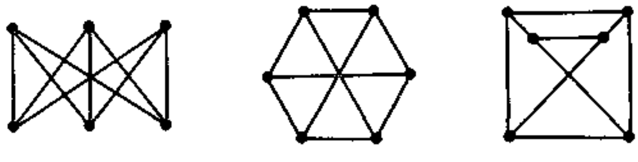


Рис. 4.

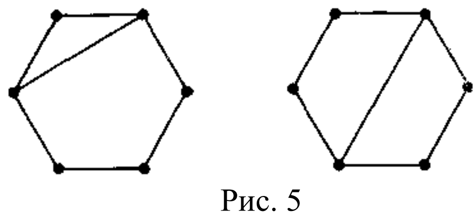


Рис. 5

Очевидно, что отношение изоморфизма графов является эквивалентностью, т. е. оно симметрично, транзитивно и рефлексивно. Следовательно, множество всех графов разбивается на классы так, что графы из одного класса попарно изоморфны, а графы из разных классов не изоморфны. Изоморфные графы можно отождествлять, т. е. считать совпадающими (их можно изобразить одним рисунком). Они могли бы различаться конкретной природой своих элементов, но именно это игнорируется при введении понятия «граф».

В некоторых ситуациях все же приходится различать изоморфные графы, и тогда полезно понятие «помеченный граф». Граф порядка n называется *помеченным,* если его вершинам присвоены некоторые метки, например, номера 1, 2, ..., n. Отождествив каждую из вершин графа с ее номером (и, следовательно, множество вершин – с множеством чисел $\{1, 2, ..., n\}$), определим равенство помеченных графов $G_1=(X,V_1)$ и $G_2=(X,V_2)$ одного и того же порядка: $G_1=G_2$ тогда, когда $V_1=V_2$. На рис. 6 изображены три разных помеченных графа.

При необходимости подчеркнуть, что рассматриваемые графы различаются лишь с точностью до изоморфизма, говорят: «абстрактный граф». Строго говоря, *абстрактный* (или *непомеченный*) граф – это класс изоморфных графов.

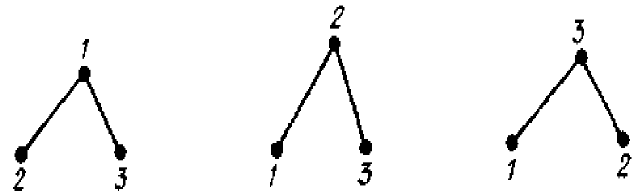


Рис. 6

Варианты заданий:

1. Дана матрица А. Постройте соответствующий ей граф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного графа.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Дана матрица А. Постройте соответствующий ей граф, имеющий матрицу А своей матрицей смежности. Найдите матрицу инцидентности для построенного графа.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа №24 Подготовка сообщения «Возникновение теории графов»; «Теория графов в наши дни»

Цель: расширить знания о возникновении теории графов, ее применении в наши дни
Самостоятельная работа: работа с литературой
Форма контроля: сообщение на уроке

Самостоятельная работа №25 Подготовка сообщения «Практические применения теории графов»

Цель: расширить знания о применении теории графов в наши дни
Самостоятельная работа: работа с литературой
Форма контроля: сообщение на уроке

Литература

Основные источники:

1. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Е.С. Кочетков, С.О. Смерчинская, В.В. Соколов. — 2-е изд., испр. и перераб. — М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2018. — 240 с. — (Среднее профессиональное образование). http://znanium.com/bookread2.php?book=944923
2. Васильев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для СПО / А. А. Васильев. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 253 с. — (Серия: Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-05176-6. https://biblio-online.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-415807#page/1
3. Малугин, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для СПО / В. А. Малугин. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 470 с. — (Серия: Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-06572-5. https://biblio-online.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-412061#page/1
4. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учебное пособие для СПО / В. Е. Гмурман. — 11-е изд., пер. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 406 с. — (Серия: Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08569-3. https://biblio-online.ru/viewer/rukovodstvo-k-resheniyu-zadach-po-teorii-veroyatnostey-i-matematicheskoy-statistike-425598#page/1

Дополнительные источники

5. Попов, А. М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для СПО / А. М. Попов, В. Н. Сотников; под ред. А. М. Попова. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 434 с. — (Серия: Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-01058-9. https://biblio-online.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-413696#page/1
6. Сидняев, Н. И. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для СПО / Н. И. Сидняев. — М.: Издательство Юрайт, 2018. — 219 с. — (Серия: Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-04091-3. https://biblio-online.ru/viewer/teoriya-veroyatnostey-i-matematicheskaya-statistika-413577#page/1

Электронно библиотечная система (ЭБС):

1. http://znanium.com/
2. http://biblioclub.ru
3. biblio-online.ru

Интернет-источники

http://www.gks.ru/wps/wcm/connect/rosstat_main/rosstat/ru/statistics/databases/ - база данных Федеральной службы государственной статистки

Приложение 1

Таблица значений интеграла Лапласа

x	Сотые доли *x*									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,00000	0,00399	0,00798	0,01197	0,01595	0,01994	0,02392	0,02790	0,03188	0,03586
0,1	0,03983	0,04380	0,04776	0,05172	0,05567	0,05962	0,06356	0,06749	0,07142	0,07535
0,2	0,07926	0,08317	0,08706	0,09095	0,09483	0,09871	0,10257	0,10642	0,11026	0,11409
0,3	0,11791	0,12172	0,12552	0,12930	0,13307	0,13683	0,14058	0,14431	0,14803	0,15173
0,4	0,15542	0,15910	0,16276	0,16640	0,17003	0,17364	0,17724	0,18082	0,18439	0,18793
0,5	0,19146	0,19497	0,19847	0,20194	0,20540	0,20884	0,21226	0,21566	0,21904	0,22240
0,6	0,22575	0,22907	0,23237	0,23565	0,23891	0,24215	0,24537	0,24857	0,25175	0,25490
0,7	0,25804	0,26115	0,26424	0,26730	0,27035	0,27337	0,27637	0,27935	0,28230	0,28524
0,8	0,28814	0,29103	0,29389	0,29673	0,29955	0,30234	0,30511	0,30785	0,31057	0,31327
0,9	0,31594	0,31859	0,32121	0,32381	0,32639	0,32894	0,33147	0,33398	0,33646	0,33891
1	0,34134	0,34375	0,34614	0,34849	0,35083	0,35314	0,35543	0,35769	0,35993	0,36214
1,1	0,36433	0,36650	0,36864	0,37076	0,37286	0,37493	0,37698	0,37900	0,38100	0,38298
1,2	0,38493	0,38686	0,38877	0,39065	0,39251	0,39435	0,39617	0,39796	0,39973	0,40147
1,3	0,40320	0,40490	0,40658	0,40824	0,40988	0,41149	0,41308	0,41466	0,41621	0,41774
1,4	0,41924	0,42073	0,42220	0,42364	0,42507	0,42647	0,42785	0,42922	0,43056	0,43189
1,5	0,43319	0,43448	0,43574	0,43699	0,43822	0,43943	0,44062	0,44179	0,44295	0,44408
1,6	0,44520	0,44630	0,44738	0,44845	0,44950	0,45053	0,45154	0,45254	0,45352	0,45449
1,7	0,45543	0,45637	0,45728	0,45818	0,45907	0,45994	0,46080	0,46164	0,46246	0,46327
1,8	0,46407	0,46485	0,46562	0,46638	0,46712	0,46784	0,46856	0,46926	0,46995	0,47062
1,9	0,47128	0,47193	0,47257	0,47320	0,47381	0,47441	0,47500	0,47558	0,47615	0,47670
2	0,47725	0,47778	0,47831	0,47882	0,47932	0,47982	0,48030	0,48077	0,48124	0,48169
2,1	0,48214	0,48257	0,48300	0,48341	0,48382	0,48422	0,48461	0,48500	0,48537	0,48574
2,2	0,48610	0,48645	0,48679	0,48713	0,48745	0,48778	0,48809	0,48840	0,48870	0,48899
2,3	0,48928	0,48956	0,48983	0,49010	0,49036	0,49061	0,49086	0,49111	0,49134	0,49158
2,4	0,49180	0,49202	0,49224	0,49245	0,49266	0,49286	0,49305	0,49324	0,49343	0,49361
2,5	0,49379	0,49396	0,49413	0,49430	0,49446	0,49461	0,49477	0,49492	0,49506	0,49520
2,6	0,49534	0,49547	0,49560	0,49573	0,49585	0,49598	0,49609	0,49621	0,49632	0,49643
2,7	0,49653	0,49664	0,49674	0,49683	0,49693	0,49702	0,49711	0,49720	0,49728	0,49736
2,8	0,49744	0,49752	0,49760	0,49767	0,49774	0,49781	0,49788	0,49795	0,49801	0,49807
2,9	0,49813	0,49819	0,49825	0,49831	0,49836	0,49841	0,49846	0,49851	0,49856	0,49861
3	0,49865	0,49869	0,49874	0,49878	0,49882	0,49886	0,49889	0,49893	0,49896	0,49900
3,1	0,49903	0,49906	0,49910	0,49913	0,49916	0,49918	0,49921	0,49924	0,49926	0,49929
3,2	0,49931	0,49934	0,49936	0,49938	0,49940	0,49942	0,49944	0,49946	0,49948	0,49950
3,3	0,49952	0,49953	0,49955	0,49957	0,49958	0,49960	0,49961	0,49962	0,49964	0,49965
3,4	0,49966	0,49968	0,49969	0,49970	0,49971	0,49972	0,49973	0,49974	0,49975	0,49976
3,5	0,49977	0,49978	0,49978	0,49979	0,49980	0,49981	0,49981	0,49982	0,49983	0,49983
3,6	0,49984	0,49985	0,49985	0,49986	0,49986	0,49987	0,49987	0,49988	0,49988	0,49989
3,7	0,49989	0,49990	0,49990	0,49990	0,49991	0,49991	0,49992	0,49992	0,49992	0,49992
3,8	0,49993	0,49993	0,49993	0,49994	0,49994	0,49994	0,49994	0,49995	0,49995	0,49995
3,9	0,49995	0,49995	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49996	0,49997	0,49997

Приложение 2

Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица значений $q = q(\gamma, n)$

γ / n	0,95	0,99	0,999	γ / n	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 3

Равномерно распределенные случайные числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 14	86 79 90 74 34
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 82 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 00 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 00	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68
65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	45 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 92 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 00 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 35
00 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 00 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 00	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 86	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 00 00	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 00 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 88 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 0162 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27