Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
«Кунгурский автотранспортный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебному предмету

ОУП.04.МАТЕМАТИКА

(код и наименование УД или МДК)

по специальности:

23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

(код и наименование специальности)

2020

Одобрено на заседании
предметно-цикловой комиссии профессионального
цикла специальностей дорожного
строительства и управления на транспорте
Протокол № 1 от «26» 08 20 20 г.
Председатель комиссии
_______________ О.С.Щелчкова

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора
_____________М.Г. Целищева
« 26 » августа 20 20 г.

Организация-разработчик: ГБПОУ КАТК

Составитель: И. Б. Воронцова

СОДЕРЖАНИЕ

1 Пояснительная записка

Данные методические рекомендации составлены в соответствии с содержанием рабочей программы ОУП.04 Математика специальности 23.02.01 Организация перевозок и управление на транспорте (по видам)

ОУП.04 Математика изучается в течение 2 семестров. Общий объем времени, отведенный на практические занятия по УД/МДК, составляет в соответствии с учебным планом и рабочей программой – 98 часов.

Практические работы проводятся после изучения соответствующих разделов и тем ОУП.04 Математика. Выполнение обучающимися практических работ позволяет им понять, где и когда изучаемые теоретические положения и практические умения могут быть использованы в будущей практической деятельности.

Практические задания, включенные в практические занятия, направлены на достижения соответствующих результатов освоения данной учебной дисциплины (личностных, предметных и метапредметных), предусмотренных ФГОС среднего общего образования и на развитие соответствующих учебных действий.

Выполнение практических работ согласно содержания ОУП.04 Математика, обеспечивает достижение обучающимися следующих результатов:

личностных–

Л1 сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики;

Л2 сформированность представлений о математике как универсальном языке –науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики;

Л3 развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования

Л4 овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественно-научных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки

Л5 готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности

Л6 готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности

Л7 готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности

Л8 отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем

Л9 гражданскую позицию как активного и ответственного члена российского общества

метапредметных–

М1. умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;

М2. умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

М3. владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

М4. готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;

М5. владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

М6. владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;

М7. целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

предметных–

П1 сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке

П2	сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий
П3	владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач
П4	владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств
П5	сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей
П6	владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием
П7	сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин
П8	владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач

В результате освоения ОУП.04. Математика развиваются следующие учебные действия:

Регулятивные УУД

УУД1 умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях.

УУД2 готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников

УУД3 владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства

Познавательные УУД

УУД4 владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания

УУД5 владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения

УУД6 целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира

Коммуникативные УУД

УУД7 умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты

УУД8 умение определять назначение и функции различных социальных институтов

2 Перечень практических работ УД/МДК ОУП.04 Математика

Название практических работ	Количество часов
РАЗДЕЛ 1 Алгебра	
Практическое занятие № 1 Операции над числами. НОК и НОД.	3
Практическое занятие № 2 Проценты. Задачи на проценты.	3
Практическое занятие № 3 Преобразование выражений, содержащих степени и корни.	3
Практическое занятие № 4 Логарифмы. Переход к новому основанию.	2
Практическое занятие № 5 Решение логарифмических уравнений и неравенств.	3
Практическое занятие № 6 Решение показательных уравнений и неравенств.	3
Практическое занятие № 7 Преобразование алгебраических выражений.	3
Практическое занятие № 8 Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения.	3
Практическое занятие № 9 Простейшие тригонометрические уравнения. Однородные тригонометрические уравнения.	3
Практическое занятие № 10 Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.	3
Практическое занятие № 11 Преобразование тригонометрических выражений.	3
Практическое занятие № 12 Арифметические операции над функциями. Сложная функция.	2
Практическое занятие № 13 Графики функций y=sin x, y=cos x, свойства, движение.	3
Практическое занятие № 14 Преобразование графиков.	2
Практическое занятие № 15 Графики функций y=tg x, y=ctg x, свойства, движение.	3
РАЗДЕЛ 2 Начала математического анализа	
Практическое занятие № 16 Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.	2
Практическое занятие № 17 Производная сложной функции.	3
Практическое занятие № 18 Нахождение производных функции.	3
Практическое занятие № 19 Исследование функций с помощью производной.	3

Практическое занятие № 20 Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин.	3
Практическое занятие № 21 Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.	2
Практическое занятие № 22 Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.	2
Практическое занятие № 23 Иррациональные и Показательные уравнения. Способы решения.	2
Практическое занятие № 24 Рациональные и Иррациональные неравенства. Способы решения.	2
Практическое занятие № 25 Показательные неравенства. Способы решения.	2
Практическое занятие № 26 Тригонометрические неравенства. Способы решения.	3
РАЗДЕЛ 3 Комбинаторика, статистика и теория вероятностей	
Практическое занятие № 27 Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.	2
Практическое занятие № 28. Решение практических задач с применением вероятностных методов.	2
РАЗДЕЛ 4 Геометрия	
Практическое занятие № 29 Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.	2
Практическое занятие № 30 Признак параллельности двух плоскостей.	2
Практическое занятие № 31 Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.	2
Практическое занятие № 32 Двугранный угол. Признак перпендикулярности двух плоскостей.	2
Практическое занятие № 33 Задачи на построение сечений.	2
Практическое занятие № 34 Сечение куба и призмы.	2
Практическое занятие № 35 Сечение пирамиды.	2
Практическое занятие № 36 Элементы симметрии правильных многогранников. Развёртка.	2
Практическое занятие № 37 Сфера и шар. Сечения.	2
Практическое занятие № 38 Сложение и вычитание векторов. Умножение	2

вектора на число.	
Практическое занятие № 39 Простейшие задачи в координатах. Формула расстояния между двумя точками.	2
Практическое занятие № 40 Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.	3
Итого: … часов	*98*

3 Инструктивно-методические указания по выполнению практических работ

1 Раздел 1. Развитие понятия о числе

Виды чисел

Натуральные числа

Те числа, о которых мы сегодня говорим, называются натуральными.
Натуральные числа – числа, возникающие естественным образом при счете (1, 2, 3, …).
В дальнейшем вы познакомитесь и с другими видами чисел:

- Целые числа
- Дробные (рациональные) числа
- Иррациональные числа
- Действительные числа
- Комплексные числа
- И др.

Для обозначения количества были придуманы **натуральные числа**: $1, 2, 3, 4, \ldots$. Для записи натуральных чисел мы используем **десятичную позиционную систему счисления**.
Десятичной она называется потому, что для записи чисел в ней используется 10 знаков – цифр: $0, 1, \ldots, 9$. Позиционной – потому что вклад цифры в число зависит от ее позиции в этом числе: 35 и 53 – разные числа ($35 = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 1$ и $53 = 5 \cdot 10 + 3 \cdot 1$).

Целые числа

Поскольку математика занимается универсальными инструментами, которые можно использовать для решения сразу многих различных задач, то мы будем опускать названия предметов и работать только с их количествами. Действительно, $8 + 7 = 15$, независимо от того, что мы складываем – яблоки, стулья или машины.
При сложении двух натуральных чисел всегда будет получаться натуральное число (в таких случаях говорят, что множество натуральных чисел замкнуто относительно операции сложения): $\mathbb{N}_1 + \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}_3$
Но иногда нужно решить обратную задачу – зная сумму и одно из исходных чисел, восстановить второе. И здесь может возникнуть ситуация, при которой решения задачи на множестве натуральных чисел нет. Например, какое число нужно добавить к 5, чтобы получилось 3? Возникает необходимость расширить понятие числа отрицательными числами и числом 0 (которое обозначает отсутствие количества).
Отрицательное число – число, которое в сумме с противоположным ему положительным дает ноль: $-2 + 2 = 0$
Натуральные числа, противоположные им, а также ноль образуют **множество целых чисел**.
Складывая и вычитая целые числа, мы всегда будем получать целые числа.

Рациональные числа

Как и в случае со сложением и вычитанием, возникают задачи, в которых необходимо выполнить операцию, обратную умножению: когда известно произведение и один из

множителей и надо найти второй множитель (например, $4 \cdot ? = 3$). Обратная операция называется делением. И снова результат деления целых чисел может не содержаться в множестве целых чисел (например, $4 : 3$).
Но как разрезать яблоки или торты, мы знаем. А как разрезать целые числа? Математика работает с общими универсальными инструментами, поэтому ввели новый вид чисел –
дробные числа (дроби)
В итоге получаем определение: **рациональные числа** – это числа, которые можно представить в эквивалентном виде $\frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное.
Отметим, что любое целое число k также является рациональным числом, поскольку его можно представить в виде дроби со знаменателем 1: $k = \frac{k}{1}$

Почему деление на ноль не определено
Ноль был введен как часть большого механизма под названием «целые числа» для обозначения отсутствия чего-то. Ноль облегчает счет и запись чисел, но нулевого количества нет, на него не укажешь пальцем, поэтому сказать, сколько нулей содержится в другом числе, нельзя
Подробно рассмотрим множество натуральных чисел. В натуральных числах различают простые числа и составные. **Простые числа** – это числа, которые имеют два делителя. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11 и т.д. делятся на себя и на 1. В свою очередь, единица не является простым числом, потому что она делится только на себя, имеет только один делитель

Наибольший общий делитель

Рассмотрим понятия $\text{НОД}\ (a; b)$ и $\text{НОК}\ (a; b)$ чисел.
НОД – наибольший общий делитель двух чисел. НОД двух целых чисел a и b, одновременно не равных нулю, называется такое наибольшее целое число d, на которое a и b делятся без остатка. Этот факт обозначается так: $d = \text{НОД}(a, b)$. Если оба числа равны нулю, то положим $\text{НОД}(0,0) = 0$.
Пример 1: Найти $\text{НОД}\ (12; 18)$
Решение: Разложим 12 и 18 на простые числа.
$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$
$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3.$
Необходимо определить общие делители 18 и 12 (из простых чисел), их произведение будет $\text{НОД}\ (12; 18)$.
$\text{НОД}\ (12; 18) = 2 \cdot 3 = 6$.
Ответ: 6

Наименьшее общее кратное

НОК – наименьшее общее кратное двух чисел. НОК двух целых чисел a и b называется наименьшее положительное целое число, кратное как a, так и b.
Пример 2: найти $\text{НОК}\ (20; 30)$.
Решение: Используем основную теорему арифметики для решения данной задачи.
Разложим 20 и 30 на простые множители.
$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.
Общие делители: 20 и 30: 2 и 5
$\text{НОК}(20; 30) = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 60$
Ответ: 60.

Проценты

Введение
Есть три типа задач на проценты. На этом уроке мы научимся решать задачи всех этих типов.
Во всех таких задачах есть:

- исходное количество, обозначим его буквой A;
- некое количество процентов, обозначим буквой b;
- и результат, обозначим его буквой C.

Найти несколько процентов от числа – это то же самое, что найти дробь от числа, ведь проценты – это тоже дробь. Чтобы найти дробь от числа, нужно число умножить на эту дробь. Например, чтобы найти $\frac{3}{5}$ от 10, нужно 10 умножить на эту дробь: $10 \cdot \frac{3}{5} = 6$.
Точно так же, чтобы найти несколько процентов от числа A, мы можем проценты записать в более привычном для нас виде, десятичной дробью, и получить эквивалентную задачу – найти дробь от числа A. Для этого нужно число A умножить на эту дробь: $A \cdot b = C$.
Пример: найдем 20% от 500. Перепишем проценты в виде десятичной дроби $20\% = 0{,}2$ и найдем $0{,}2$ от 500: $500 \cdot 0{,}2 = 100$. То есть задачу «найти 20% от 500» мы сформулировали в эквивалентном виде «найти $0{,}2$ от 500» и решили ее.

Типы задач

Задача появляется, когда одно из этих трех значений неизвестно.

- Известны A и b. То есть исходное количество и проценты. Не известен результат: $A \cdot b = C$.
- Неизвестно исходное количество, зато известно, чему равно некоторое количество процентов от него: $A \cdot b = C$.
- Известно исходное количество и его часть, нужно определить, сколько процентов эта часть составляет: $A \cdot b = C$.

Приближенные вычисления.

Приближенное значение величины и погрешности приближений

Приближенное значение величины записывается следующим образом $x \approx a$.
Определение. Разность $a - x = \Delta$ называется погрешностью приближения.
Определение. Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением a называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается через α, т.е. $|x - a| = \alpha$.
Определение. Число Δa называется границей абсолютной погрешности приближенного числа a.
Определение. Относительной погрешностью δ приближенного значения a числа x называется отношение абсолютной погрешности α к числу a: $\delta = \frac{\alpha}{a}$.
Утверждение. Абсолютная погрешность α часто неизвестна, поэтому на практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε, которое не меньше этого модуля: $|\delta| \le \varepsilon$
Число ε называется границей относительной погрешности.
Определение. Границей относительной погрешности a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a: $\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}$.

Определение. Абсолютная погрешность, допустимая при округлении, называется погрешностью округления.
Утверждение. Округление с недостатком до единиц некоторого разряда состоит в отбрасывании единиц всех младших разрядов.
Утверждение. Округление с избытком до единиц некоторого разряда состоит в том, что число единиц данного разряда увеличивают на единицу.
. 4. Решение ключевых задач.

Пример 1. Даны приближенные значения $x = \frac{2}{3}$: $a_1 = 0,6$; $a_2 = 0,66$; $a_3 = 0,67$. Какое из этих приближения является лучшим?
Решение.

$$a_1 = \left|\frac{2}{3} - 0,6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15} \qquad a_3 = \left|\frac{2}{3} - 0,67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}$$

$$a_2 = \left|\frac{2}{3} - 0,66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150}$$

Ответ: лучшим приближение числа x является $a_3 = 0,67$.

Пример 2. Округлить с избытком до сотых, десятых и единиц число $15,368$.
Решение. До сотых $15,368 \approx 15,37$; до десятых $15,386 \approx 15,4$; до единиц $15,386 \approx 16$.
Ответ: погрешности округления равны: $0,002; 0,032; 0,632$.

Комплексные числа

Определение. Комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b - действительные числа. При этом выполняются условия:
а) Два комплексных числа $a_1 + b_1 i$ и $a_2 + b_2 i$ равны тогда и только тогда, когда $a_1=a_2$, $b_1=b_2$.
б) Сложение комплексных чисел определяется правилом:
$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$.
в) Умножение комплексных чисел определяется правилом:
$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, i$.

Формы комплексного числа.

1. Алгебраическая $z = a + bi$

сложение: $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

умножение: $(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i - b_1 b_2$

деление: $\dfrac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \dfrac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$

2. Тригонометрическая $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

умножение: $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

возведение в степень: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

извлечение корня: $z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\psi}{n} + \dfrac{2\pi k}{n}\right)\right)$, $k = 0,1,2,3,\ldots$

3. Показательная $z = r\cdot e^{i\varphi}$

умножение: $z_1 \cdot z_2 = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

деление: $\dfrac{z_1}{z_2} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

возведение в степень: $z^n = e^{in\varphi}$

Алгебраическая форма комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа, где a – действительная часть, bi – мнимая часть, причем b – действительное число.
Комплексное число $a + bi$ считается равным нулю, если его действительная и мнимая части равны нулю: $a = b = 0$
Комплексное число $a + bi$ при $b = 0$ считается совпадающим с действительным числом a: $a + 0i = a$.
Комплексное число $a + bi$ при $a = 0$ называется чисто мнимым и обозначается bi: $0 + bi = bi$.
Два комплексных числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a – bi$, отличающиеся лишь знаком мнимой части, называются сопряженными.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Над комплексными числами в алгебраической форме можно выполнять следующие действия.
1) Сложение.
Определение. Суммой комплексных чисел $z_1 = a_1 + b_1i$ и $z_2 = a_2 + b_2i$ называется комплексное число z, действительная часть которого равна сумме действительных частей z_1 и z_2, а мнимая часть - сумме мнимых частей чисел z_1 и z_2, то есть $z = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.
Числа z_1 и z_2 называются слагаемыми.
Сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:
1°. Коммутативность: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.
2°. Ассоциативность: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
3°. Комплексное число $–a –bi$ называется противоположным комплексному числу $z = a + bi$. Комплексное число, противоположное комплексному числу z, обозначается $-z$. Сумма комплексных чисел z и $-z$ равна нулю: $z + (-z) = 0$
Пример 1. Выполните сложение $(3 – i) + (-1 + 2i)$.
$(3 – i) + (-1 + 2i) = (3 + (-1)) + (-1 + 2) i = 2 + 1i$.
2) Вычитание.
Определение. Вычесть из комплексного числа z_1 комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z + z_2 = z_1$.
Теорема. Разность комплексных чисел существует и притом единственна.
Пример 2. Выполните вычитание $(4 – 2i) - (-3 + 2i)$.
$(4 – 2i) - (-3 + 2i) = (4 - (-3)) + (-2 - 2) i = 7 – 4i$.
3) Умножение.
Определение. Произведением комплексных чисел $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называется комплексное число z, определяемое равенством: $z = (a_1a_2 – b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$.
Числа z_1 и z_2 называются сомножителями.
Умножение комплексных чисел обладает следующими свойствами:
1°. Коммутативность: $z_1z_2 = z_2z_1$.
2°. Ассоциативность: $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$
3°. Дистрибутивность умножения относительно сложения:
$(z_1 + z_2) z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$.
4°. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a – bi) = a^2 + b^2$ - действительное число.
На практике умножение комплексных чисел производят по правилу умножения суммы на сумму и выделения действительной и мнимой части.
В следующем примере рассмотрим умножение комплексных чисел двумя способами: по правилу и умножением суммы на сумму.
Пример 3. Выполните умножение $(2 + 3i) (5 – 7i)$.
1 способ. $(2 + 3i) (5 – 7i) = (2\cdot 5 – 3\cdot (- 7)) + (2\cdot (- 7) + 3\cdot 5)i = (10 + 21) + (- 14 + 15)i = 31 + i$.
2 способ. $(2 + 3i) (5 – 7i) = 2\cdot 5 + 2\cdot (- 7i) + 3i\cdot 5 + 3i\cdot (- 7i) = 10 – 14i + 15i + 21 = 31 + i$.
4) Деление.
Определение. Разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, значит найти такое комплексное число z, что $z \cdot z_2 = z_1$.
Теорема. Частное комплексных чисел существует и единственно, если $z_2 \neq 0 + 0i$.

На практике частное комплексных чисел находят путем умножения числителя и знаменателя на число, сопряженное знаменателю.

Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, тогда $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$.

В следующем примере выполним деление по формуле и правилу умножения на число, сопряженное знаменателю.

Пример 4. Найти частное $\frac{2-3i}{5+2i}$.

1 способ.

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot 2}{5^2 + 2^2} + \frac{5\cdot(-3) - 2\cdot 2}{5^2 + 2^2} i = \frac{10-6}{25+4} + \frac{-15-4}{25+4} i = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i$$

2 способ.

$$\frac{2-3i}{5+2i} = \frac{(2-3i)(5-2i)}{(5+2i)(5-2i)} = \frac{10-4i-15i-6}{5^2-(2i)^2} = \frac{4-19i}{25+4} = \frac{4}{29} - \frac{19}{29} i.$$

5) Возведение в целую положительную степень.

а) Степени мнимой единицы.

Пользуясь равенством $i^2 = -1$, легко определить любую целую положительную степень мнимой единицы. Имеем:

$i^3 = i^2 i = -i$, $\quad i^5 = i^4 i = i$, $\quad i^7 = i^5 i^2 = -i$,

$i^4 = i^2 i^2 = 1$, $\quad i^6 = i^4 i^2 = -1$, $\quad i^8 = i^6 i^2 = 1$ и т. д.

Это показывает, что значения степени i^n, где n – целое положительное число, периодически повторяется при увеличении показателя на 4 .

Поэтому, чтобы возвести число i в целую положительную степень, надо показатель степени разделить на 4 и возвести i в степень, показатель которой равен остатку от деления.

Пример 5. Вычислите: $(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23}$.

$i^{36} = (i^4)^9 = 1^9 = 1$,

$i^{17} = i^{4\cdot 4+1} = (i^4)^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

$i^{23} = i^{4\cdot 5+3} = (i^4)^5 \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = -i$.

$(i^{36} + i^{17}) \cdot i^{23} = (1 + i)(-i) = -i + 1 = 1 - i$.

б) Возведение комплексного числа в целую положительную степень производится по правилу возведения двучлена в соответствующую степень, так как оно представляет собой частный случай умножения одинаковых комплексных сомножителей.

Пример 6. Вычислите: $(4 + 2i)^3$

$(4 + 2i)^3 = 4^3 + 3\cdot 4^2 \cdot 2i + 3\cdot 4\cdot (2i)^2 + (2i)^3 = 64 + 96i - 48 - 8i = 16 + 88i$.

Корень n-ой степени и его свойства.

1.Определение. Корнем n-ной степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a, то есть

$$\boxed{\begin{gathered}\sqrt[n]{a} = b \\ b^n = a\end{gathered}}$$

Если **n** - нечетное число, то существует единственный корень n-й степени из любого числа (положительного или отрицательного).

Например, $\sqrt[3]{-8} = -2$, $\sqrt[3]{8} = 2$

Если **n** - четное число, то существует два корня n-й степени из любого положительного числа. Например, корень четвертой степени из числа 625- это числа **-5** и **5**. Так как $(5)^4 = 625$, $(-5)^4 = 625$

Корень четной степени из отрицательного числа не существует.

Например, $\sqrt[2]{-16}$ – не имеет смысла.

2.Определение. Арифметическим корнем n-ной степени из числа a называют неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Например, $\sqrt{81} = 9$ т.к. $9^2 = 81$

$\sqrt[3]{27} = 3$ т.к. $3^3 = 27$

$\sqrt[4]{625} = 5$ т.к. $5^4 = 625$

$\sqrt[3]{-27} = -3$ т.к. $(-3)^3 = -27$

$\sqrt[99]{-1} = -1$ т.к. $(-1)^{99} = -1$

3.Основные свойства арифметических корней n-ной степени.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1°. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($b \neq 0$ ¿

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$

4°. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$

5°. $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k$ (если $k \le 0, то\ a \ne 0$¿

6°. Для любых чисел $a\ и\ b$, таких, что $0 \le a < b$, выполняется неравенство $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$

Степени с рациональными показателями, их свойства.

Если n- натуральное число, $n \geq 2$, m- целое число и частное $\frac{m}{n}$ является целым числом, то при $a > 0$ справедливо равенство:

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

При любом действительном x $(x \in R)$ и любом положительном a $(a > 0)$ степень a^x является положительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R, a > 0$.

Но если основание степени a=0, то степень 0^x определяют только при $x > 0$, и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$.

При $x \leq 0$ выражение 0^x не имеет смысла.
Свойства степени с рациональным показателем:
При a > 0, b > 0, p и q - рациональные числа:

а) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

б) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

в) $(a^p)^q = a^{pq}$

г) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$

д) $(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$

Определение степени с действительным показателем.

При любом действительном x $(x \in R)$ и любом положительном a $(a > 0)$ степень a^x является положительным числом: $a^x > 0$ при $x \in R, a > 0$.

Но если основание степени a=0, то степень 0^x определяют только при $x > 0$, и считают, что $0^x = 0$ при $x > 0$.

При $x \leq 0$ выражение 0^x не имеет смысла. Для степени с действительным показателем сохраняются все известные свойства степени с рациональным показателем

Решение заданий на преобразование логарифмических выражений

I. Свойства логарифмов.

1. Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a x} = x$
2. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
3. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
4. $\log_a x^n = n \log_a x$
5. $\log_a a = 1$
6. $\log_a 1 = 0$

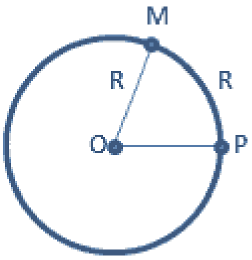
$$7.\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$8.\ \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$ - формула перехода к другому основанию

$$9.\ \log_{a^n} x = \frac{1}{n}\log_a x$$

Тригонометрия

1.Наравне с градусной мерой угла используется радианная.

O 

Возьмем на координатной плоскости окружность с центром в точке и радиусом R. Отметим на ней дугу PM, длина которой равна R и угол POM.

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

Градусная мера угла в 1 радиан равна:

Так как дуга длиной πR (полуокружность), стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R, стягивает угол в π раз меньший, т.е.

$$\mathbf{1}\ \text{рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\right)^{\circ}$$

И наоборот

$$\mathbf{1}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}\text{рад}$$

Так как π = 3,14, то 1 рад = 57,3°

Если угол содержит *a* радиан, то его градусная мера равна

$$\boldsymbol{a}\ \text{рад} = \left(\frac{\mathbf{180}}{\boldsymbol{\pi}}\cdot \boldsymbol{a}\right)^{\circ}$$

И наоборот

$$\boldsymbol{a}^{\circ} = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{180}}\cdot \boldsymbol{a}\ \text{рад}$$

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

Например, 360° = 2π рад, пишут 360° = 2π

Синусом угла *a* называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол *a*.

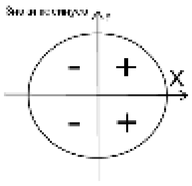
Косинусом угла *a* называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол *a*.

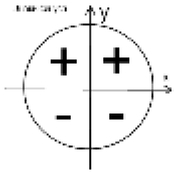
Наиболее часто встречающиеся значения синуса и косинуса приведены в таблице:

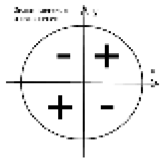
Тангенс угла – это отношение синуса этого угла к косинусу этого же угла.

Котангенс угла – это отношение косинуса этого угла к синусу этого же угла.

Знаки тангенса и котангенса можно определить, зная знаки синуса и косинуса в различных четвертях на единичной окружности:







Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Зависимость между синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Формулы сложения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Формулы двойного и тройного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Формулы суммы и разности тангенсов:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму (разность):

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

Формулы приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha,$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha.$$

Формулы суммы и разности синусов:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Формулы суммы и разности косинусов:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Тригонометрическим уравнением называется уравнение, содержащее переменную под знаком тригонометрических функций.

Простейшими тригонометрическими уравнениями являются уравнения вида

$\sin x = a$, $tgx = a$,

$\cos x = a$, $ctgx = a$.

Уравнение $\sin x = a$.

Так как множество значений функции $y = \sin x$ - отрезок [-1;1], то данное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $|a| \le 1$.

Далее, из-за периодичности функции $y = \sin x$, каждому значению a соответствует бесконечное множество решений. Поэтому все решения описываются формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \arcsin a + 2\pi k \\ x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k, \ k \in Z \end{cases}$$

или обобщенной формулой

$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \ k \in Z$.

На рисунке 1 члены первой последовательности отмечены кружками, а второй - квадратами.

Заметим, что $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Пример. Решить уравнение $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

Решение. $x = (-1)^k \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right) + \pi k, \ k \in Z \Rightarrow x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z$.

Ответ: $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k, \ k \in Z$.

Уравнение $\cos x = a$.

Данное уравнение имеет тогда и только тогда, когда $|a| \le 1$.

Множество решений записывается в виде

$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \ k \in Z$.

Заметим, что $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

Пример. Решить уравнение $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

Решение. $x = \pm \arccos \dfrac{1}{2} + 2\pi k, \ k \in Z \Rightarrow x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$.

Ответ:

$x = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in Z$

Уравнение $tgx = a$.

Данное уравнение разрешимо при любом a. Все решения задаются формулой

$x = arctga + \pi k, \ k \in Z$.

Заметим, что $arctg(-a) = -arctga$.

Пример. Решить уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

Решение. $x = arctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z$.

Уравнение $ctgx = a$.

Данное уравнение разрешимо при любом a. Все решения задаются формулой $x = arcctga + \pi k,\ k \in Z$.

Заметим, что $arcctg(-a) = \pi - arcctga$.

Пример. Решить уравнение $ctgx = \sqrt{3}$.

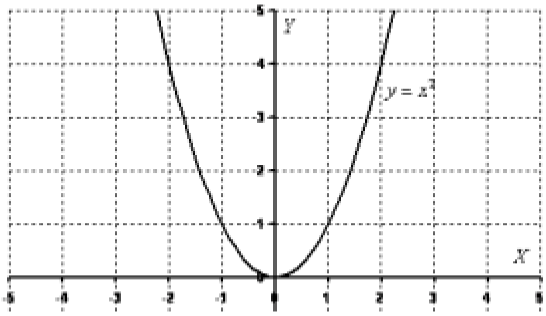
Решение. $x = arcctg\sqrt{3} + \pi k,\ k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Функции. Их свойства и графики

Краткое изложение теоретических вопросов:
График квадратичной, кубической функции.

Парабола. График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим: $y = x^2$



Область определения – любое действительное число (любое значение «икс»). Какую бы точку на оси OX мы не выбрали – для каждого «икс» существует точка параболы. Математически это записывается так: $D(f) = \Re$. Область определения любой функции стандартно обозначается через $D(f)$ или $D(y)$.

Буква $\Re$ обозначает множество действительных чисел.

Область значений – это множество всех значений, которые может принимать переменная «игрек». В данном случае: $E(f) = [0;+\infty)$ – множество всех положительных значений, включая ноль. Область значений стандартно обозначается через $E(f)$ или $E(y)$.

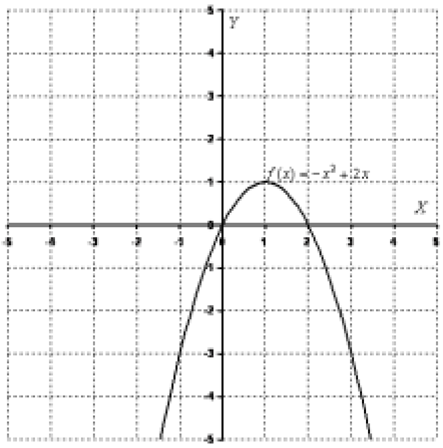
Функция $y = x^2$ является **чётной. Если функция является чётной, то ее график симметричен относительно оси** OY. Аналитически чётность функции выражается условием $f(-x) = f(x)$. Чтобы проверить любую функцию на чётность н**ужно вместо** x **подставить в уравнение** $-x$. В случае с параболой проверка выглядит так: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, значит, функция $y = x^2$ является четной.

Функция $y = x^2$ **не ограничена сверху**.

Построить график функции $f(x) = -x^2 + 2x$.

x	1	0	2	-1	3	-2	4
y	1	0	0	-3	-3	-8	-8

Выполним чертеж:



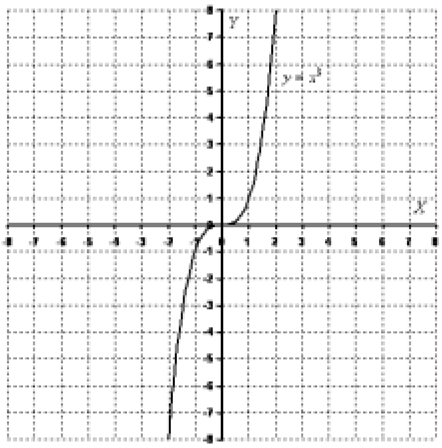
Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее:

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Кубическая парабола

Кубическая парабола задается функцией $y = x^3$.



Перечислим основные свойства функции $y = x^3$

Область определения – любое действительное число: $D(f) = \Re$.

Область значений – любое действительное число: $E(f) = \Re$.

Функция $y = x^3$ является **нечётной. Если функция является нечётной, то ее график симметричен относительно начала координат**. Аналитически нечётность функции выражается условием $f(-x) = -f(x)$. Выполним проверку для кубической функции: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -(x^3) = -f(x)$, значит, функция $y = x^3$ является нечетной.

Функция $y = x^3$ **не ограничена**.

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	8	-8

График любого многочлена третьей степени $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) имеет следующий вид:

В этом примере коэффициент при старшей степени $a < 0$, поэтому график развёрнут «наоборот». Принципиально такой же вид имеют графики многочленов 5-ой, 7-ой, 9-ой и других нечетных степеней.

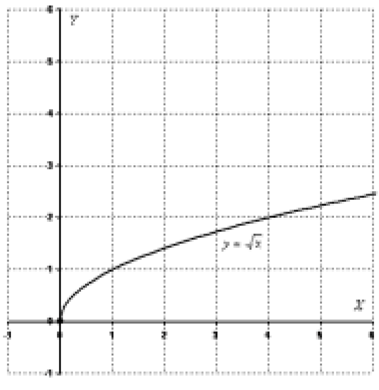


График функции $y = \sqrt{x}$

Он представляет собой одну из ветвей **параболы**.

Основные свойства функции $y = \sqrt{x}$:

Область определения: $D(f) = [0;+\infty)$.

Область значений: $E(f) = [0;+\infty)$.

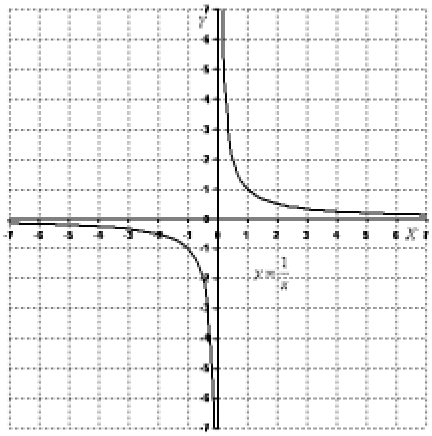
То есть, график функции полностью находится в первой координатной четверти.

Функция $y = \sqrt{x}$ **не ограничена сверху**.

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

График гиперболы
$y = \frac{1}{x}$.

Выполним чертеж:



Основные свойства функции $y = \frac{1}{x}$:

Область определения: $D(f) = \Re \setminus \{0\}$.

Область значений: $E(f) = \Re \setminus \{0\}$.

Запись $\Re \setminus \{0\}$ обозначает: «любое действительное число, исключая ноль»

В точке $x = 0$ функция терпит **бесконечный разрыв**.

Такая прямая (к которой бесконечно близко приближается график какой-либо функции) называется **асимптотой**.

В данном случае ось OY является **вертикальной асимптотой** для графика гиперболы при $x \to 0$.

Таким образом, ось OX является **горизонтальной асимптотой** для графика функции $y = \frac{1}{x}$.

Функция $y = \frac{1}{x}$ является нечётной, а, значит, гипербола симметрична относительно начала координат. $f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.

График функции вида $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) представляют собой две ветви гиперболы.

Если $a > 0$, то гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях (см. рисунок выше).

Если $a < 0$, то гипербола расположена во второй и четвертой координатных четвертях.

Обратная функция

Если поменять ролями аргумент и функцию, то x станет функцией от y. В этом случае говорят о новой функции, называемой обратной функцией. Предположим, мы имеем функцию:

$v = u^2$,

где u - аргумент, а v - функция. Если поменять их ролями, то мы получим u как функцию v :

$u = \sqrt{v}$.

Если обозначить аргумент в обеих функциях через x , а функцию – через y, то мы имеем две функции:

$y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$,

каждая из которых является обратной по отношению к другой.

Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции.

График показательной функции

Экспоненциальная функция $y = e^x$

x	-1	0	1
y	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$

e – это иррациональное число: $e \approx 2{,}718...$.

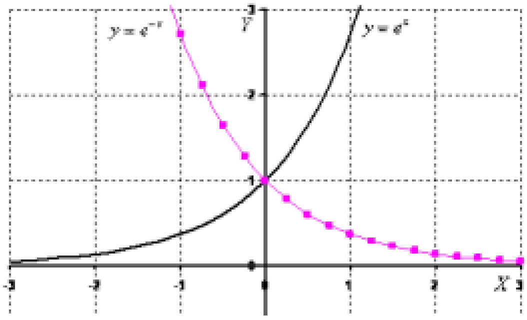


График функции $y = e^{-x}$ пока оставим в покое, о нём позже.

Основные свойства функции $y = e^x$:

Область определения: $D(f) = \Re$

Область значений: $E(f) = (0;+\infty)$. Экспонента – функция положительная, то есть для любого «икс» справедливо неравенство $y = e^x > 0$, а сам график экспоненты полностью расположен в верхней полуплоскости.

Ось OX является горизонтальной асимптотой для графика функции $y = e^{-x}$,

Такой же вид имеет любая показательная функция $y = a^x$, если $a > 1$. Функции $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 10^x$ будут отличаться только крутизной наклона графика, причем, чем больше основание, тем круче будет график.

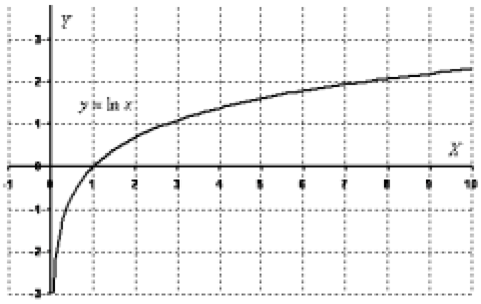
Во всех случаях графики проходят через точку $(0;1)$, то есть $a^0 = 1$.

График логарифмической функции

Рассмотрим функцию с натуральным логарифмом $y = \ln x$.

Выполним поточечный чертеж:

x	$e^{-1} \approx 0{,}37$	1	$e \approx 2{,}72$	$e^2 \approx 7{,}39$
y	-1	0	1	2



Основные свойства функции $y = \ln x$:

Область определения: $D(f) = (0;+\infty)$

Область значений: $E(f) = \Re$.

Функция не ограничена сверху: пусть и медленно, но ветка логарифма уходит вверх на бесконечность.

Таким образом, ось OY является вертикальной асимптотой для графика функции $y = \ln x$ при «икс» стремящемся к нулю справа.

$\log_a 1 = 0$.

Экспоненциальная функция $y = e^x$ и логарифмическая функция $y = \ln x$ – это две взаимно обратные функции.

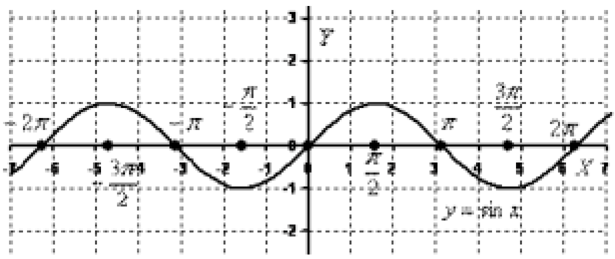
Графики тригонометрических функций

Построим график функции $y = \sin x$

Данная линия называется синусоидой.

иррациональное число: $\pi \approx 3{,}14$

Основные свойства функции $y = \sin x$:



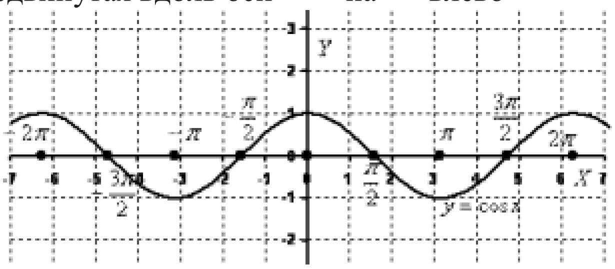
Данная функция является периодической с периодом 2π. Посмотрим на отрезок $[0;2\pi]$. Слева и справа от него бесконечно повторяется .

Область определения: $D(f) = \Re$, то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.

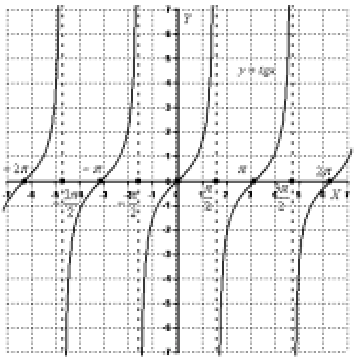
Область значений: $E(f)=[-1;1]$. Функция $y=\sin x$ является ограниченной: $-1 \le \sin x \le 1$, то есть, все у $[-1;1]$.
Синус – это функция нечетная, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: $\sin(-x)=-\sin x$. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, то минус терять здесь ни в коем случае нельзя. Он выносится: $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}$

В практических вычислениях следующие значения синуса: $\sin 0=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\sin\pi=0$.
График косинуса
Построим график функции $y=\cos x$

График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси OX на $\frac{\pi}{2}$ влево



Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.
Косинус – это функция четная, ее график симметричен относительно оси OY, и справедлив следующий факт: $\cos(-x)=\cos x$.
Для решения практических задач нужно знать и помнить следующие значения косинуса: $\cos 0=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$, $\cos\pi=-1$.
Графики тангенса и котангенса
Построим график функции $y=tgx$



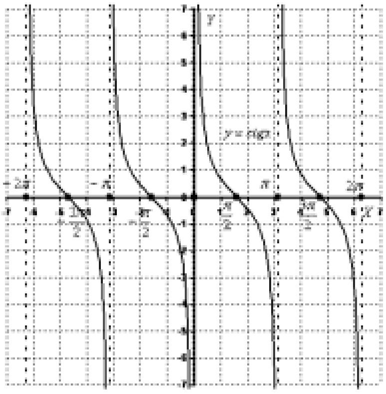
Основные свойства функции $y=tgx$:
Данная функция является периодической с периодом π. То есть, достаточно рассмотреть отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

Область определения: $D(f)=\Re\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z\right\}$ – все действительные числа, кроме … $x=-\frac{3\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$ … и т. д. или коротко: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, где k – любое целое число. Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в математике обозначают буквой Z.
Область значений: $E(f)=\Re$. Функция $y=tgx$ не ограничена.
Тангенс – функция нечетная, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса <u>не теряется</u>, а выносится: $tg(-x)=-tgx$.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения тангенса: $tg0 = 0$, $tg\pi = 0$, $tg\frac{\pi}{4} = 1$, а также те точки, в которых тангенса не существует.

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением $ctgx = \frac{1}{tgx}$.

Его график:



2.. Симметрия относительно осей координат.

Функции y = f(x) и y = -f(x) имеют одну и ту же область определения. Их графики симметричны относительно оси Ox (рис. 1), так как точки (x; f(x)) и (x; -f(x)) симметричны относительно оси Ox. Поэтому график функции y = -f(x) получается из графика функции y = f(x) симметричным отражением последнего относительно оси Ox.

Построим этим способом графики функций $y = -x^2$ (рис. 2) и $y = -\log_2 x$ (рис. 3).

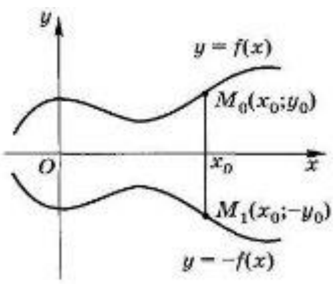


Рис. 1

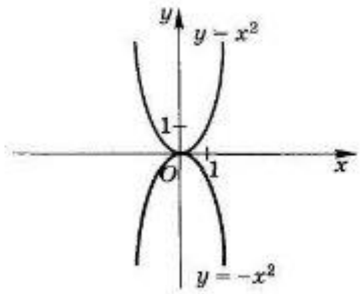


Рис. 2

Функции y = f(x) и y = f(-x) имеют области определения, симметричные относительно точки O. Графики этих функций симметричны относительно оси Oy (рис. 4), поэтому график функции y = f(-x) получается из графика функции y = f(x) симметричным отражением последнего относительно оси Oy.

Постоим этим способом графики функций $y = 2^{-x}$ (рис. 5) и $y = \log_2(-x)$ (рис. 6).

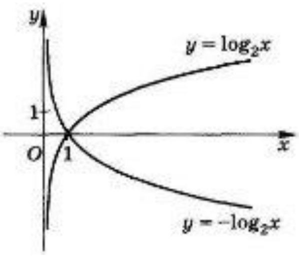


Рис.3

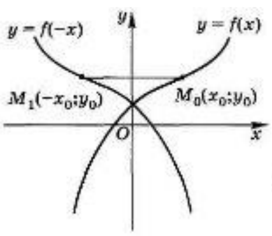


Рис. 4

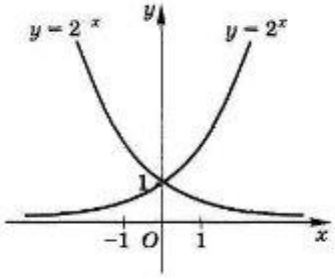


Рис. 5

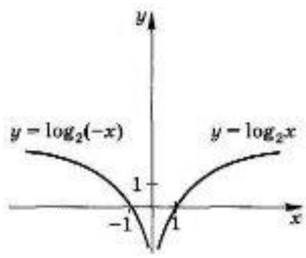


Рис. 6

Сдвиг вдоль осей координат (параллельный перенос).

Функция y = f(x-a), где $a \neq 0$, определена для всех x, таких, что (x-a) принадлежит области определения функции y = f(x), график функции y = f(x-a) получается сдвигом вдоль оси Ox на величину |a| графика функции y = f(x) вправо, если a > 0, и влево, если a < 0.

Построим этим способом графики функций $y = (x-2)^2$ (рис. 7), $y = \log_2(x+3)$ (рис. 8) и $y = \cos(x+\frac{\pi}{3})$ (рис. 9).

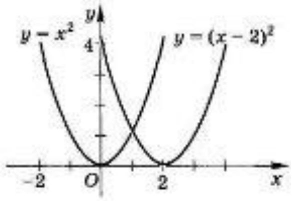


Рис. 7

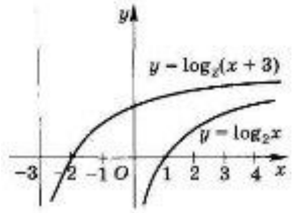


Рис. 8

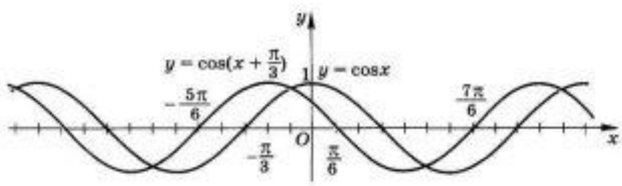


Рис. 9

Функции y = f(x)+B, где B ≠ 0, и y = f(x) имеют одну и ту же область определения. График функции y = f(x)+B получается сдвигом графика функции y = f(x) вдоль оси Оy на величину |B| вверх, если B > 0, и вниз, если B < 0.

Построим этим способом графики функций y = x^2-4 (рис. 10), y = $\log_2$x-3 (рис. 11) и y = sinx+2 (рис. 12).

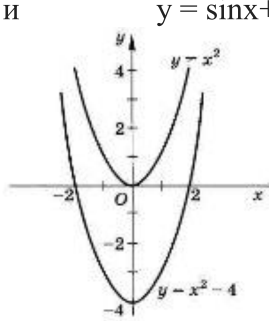


Рис. 10

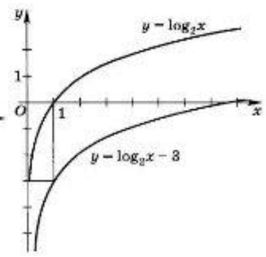


Рис. 11

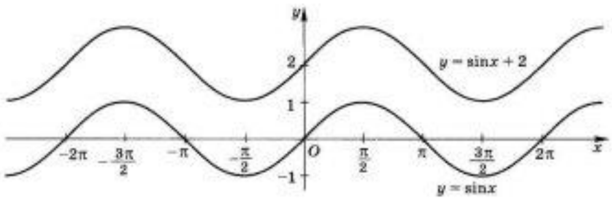


Рис. 12

Растяжение и сжатие графика вдоль осей координат.

Функции y = f(x) и y = Bf(x), где B > 0, имеют одну и ту же область определения. График функции y = Bf(x) получается растяжением в B раз, если B > 1, и сжатием в $\frac{1}{B}$ раз, если 0 < B < 1, вдоль оси Оy графика функции y = f(x).

Если B < 0, то B = -|B|, и построение графика функции y = Bf(x) разбивается на два этапа: 1) построение графика функции y = |B|f(x) по графику функции y = f(x); 2) построение графика функции y = -|B|f(x) по графику функции y = |B|f(x).

Построим этим способом графики функций y = $-2x^2$ (рис. 13), y = 2sinx (рис. 14) и y = $\frac{1}{2}$ cosx (рис. 13).

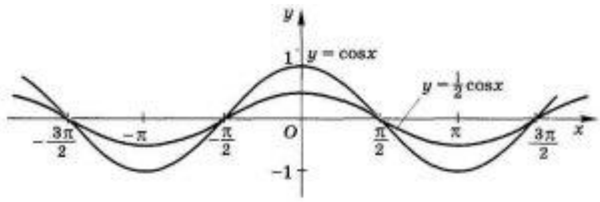


Рис. 13

Функция y = f(kx), где k > 0, определена для всех x, таких, что число kx принадлежит области определения функции y = f(x). График функции y = f(kx) получается сжатием в k раз к оси Оy, если k > 1, и растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Оy, если 0 < k < 1, графика функции y = f(x).

Если k < 0, то k = -|k|, и построение графика функции y = f(kx) разбивается на два этапа: 1) построение графика функции y = f(|k|x) по графику функции y = f(x); 2) построение графика функции y = f(-|k|x) по графику функции y = f(|k|x).

Построим этим способом графики функций y = cos($\frac{1}{2}$ x) (рис. 14)иy = $\log_2$(- $\frac{1}{3}$ x) (рис. 15).

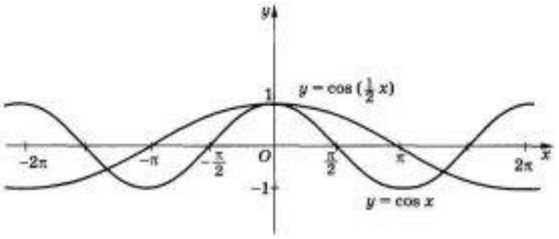


Рис. 14

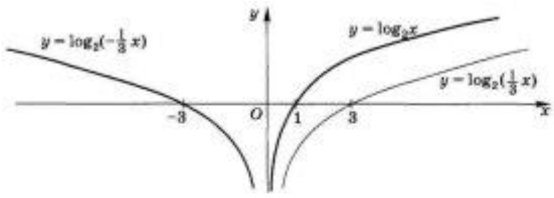


Рис. 15

4. Построение графика функции y = Af(k(x-a))+B по графику функции y = f(x).
График функции y = Af(k(x-a))+B строится по графику функции y = f(x) последовательным применением рассмотренных выше преобразований графиков. Например, так:
y = f(x) → y = f(kx) → y = Af(kx) → y = Af(k(x-a)) → y = Af(k(x-a))+B.

Предел функции

Понятие функции. Теория пределов. Числовая функция и ее график

Функция - это одно из наиболее важных понятий в математике. В общем смысле ее можно понимать как *зависимость* между двумя переменными.

Определение 1. Пусть имеются два множества X и Y, и указано правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. Тогда говорят, что задано *отображение* или *функция* f из X в Y. Множество X называют *областью определения функции* f и обозначают $D(f) = X$. Множество Y - *областью значений функции* f и обозначают $E(f) = Y$.

Чаще всего для обозначения функций используют малые латинские (f, g, h) или греческие (φ, ψ) буквы. Запись $f: X \to Y$ означает, что функция f отображает множество X в множество Y. Для соответствующих элементов x и y используют запись $y = f(x)$, которая читается «элемент y есть функция f от элемента x».

В курсе высшей математики изучают *числовые функции*, которые характеризуются тем, что оба множества X и Y состоят из чисел, т.е. $X \subset R, Y \subset R$. *Независимая переменная* x называется *аргументом*, а *зависимая переменная* y - *значением функции*.

Определение 2. *Графиком функции* f называют множество точек с координатами $(x, f(x))$, где $x \in X$.

Заметим, что каждая прямая, параллельная оси ординат, т.е. каждая прямая $x = const$ (рис. 1), пересекает его либо в единственной точке (если $x \in X$), либо не пересекает вовсе (если $x \notin X$).

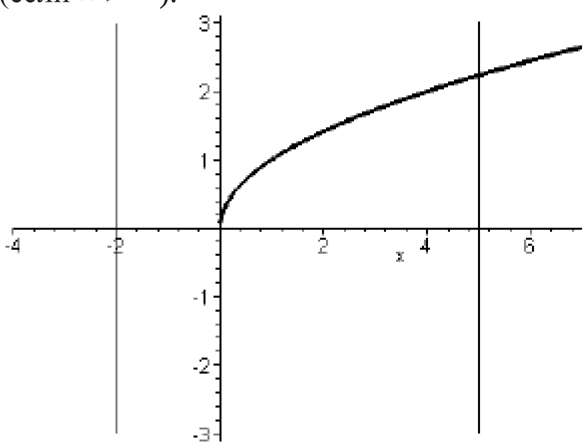


Рис. 1. Иллюстрация графика функции

Способы задания функции

Остановимся теперь на *способах задания* функции.

Первый способ - *табличный*. Он используется, когда область определения функции состоит из конечного множества чисел $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Тогда для задания функции проще

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Например, x - производительность труда в усл. ед., y - прибыль компании в ден. ед. Данные по этой компании приведены в виде таблицы:

x	1	1,5	2	2,5	3
y	2,4	2,31	2,93	3,57	3,1

Ее график изображен на рис. 2.

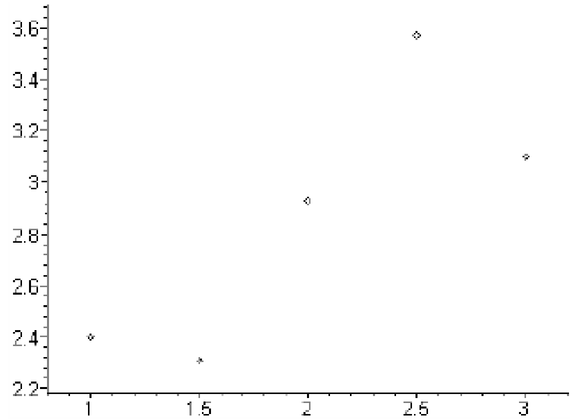
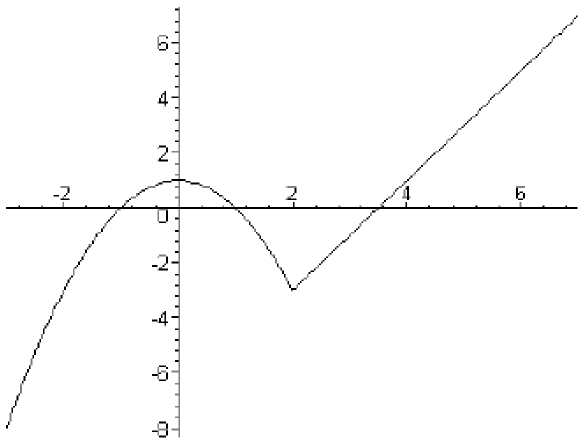


Рис. 2. График функции, заданной табличным способом

Второй способ задания функции - *аналитический*. При этом способе указывают формулу, с помощью которой связаны нeременные x и y.

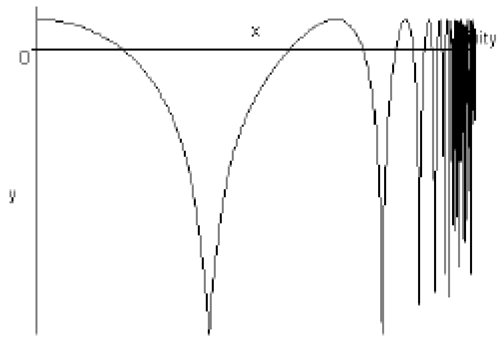
Например, $y=\sqrt{x^2+1}$, $y=\sin 2x$ и т.п. Функция может задаваться и с помощью нескольких формул (рис. 3):



$$y=\begin{cases}-x^2+1, x<2\\ 2x-7, x\geq 2\end{cases}$$

Рис. 3. График функции, заданной аналитическим способом

Третий способ задания функции - *графический*, т.е. с помощью графика (рис. 4). Его часто



используют для практических целей. Это может быть, например, траектория ракеты, электрокардиограмма и т.п.

Рис. 4. График функции, заданной графическим способом

Понятия обратной и сложной функции

Над функциями можно совершать различные математические операции: сложение, умножение и т.д. Подробно рассмотрим операции построения *обратной* и *сложной* функций. Пусть имеется функция $y=f(x)$ с $D(f)=X$ и $E(f)=Y$. Предположим дополнительно, что разным значениям x отвечают разные значения y:

$x_1\neq x_2 \Rightarrow y_1\neq y_2$. (1)

Заметим, что не каждая функция удовлетворяет этому требованию. Например, для функции $y=x^2$ разным числам x и $(-x)$ соответствует одно число x^2.

Итак, если выполняется условие (1), то для каждого $y\in Y$ существует только одно значение $x\in X$, такое, что $f(x)=y$. Такое отображение множества Y в множество X называется *обратным* к отображению f и обозначается f^{-1}: $f:X\to Y$, $f^{-1}:Y\to X$. Т.о., обратная функция для $y=f(x)$ есть $x=f^{-1}(y)$. Т.к. буквой x обозначают аргумент, а значение функции - буквой y, то обратная функция запишется обычным образом: $y=f^{-1}(x)$.

Пример:

Пусть $y=x^2$. У этой функции $D(y)=R,\quad E(y)=[0,+\infty)$. Формально обратной функции не существует, т.к. $x=\pm\sqrt{y}$. Если же принять $D(y)=[0,+\infty)$, то будем иметь $x=\sqrt{y}$. Меняя обозначения, получим запись обратной функции в виде $y=\sqrt{x}$. Обратной функцией к $y=2^x$ будет функция $y=\log_2(x)$. Графики этих взаимно обратных функций изображены на рис. 5.

Заметим, что графики исходной функции $y = f(x)$ и обратной $y = f^{-1}(x)$ всегда симметричны относительно «биссектрисы» 1-й и 3-й координатных четвертей, т.е. относительно прямой $y = x$ (см. рис. 5).

Другой важной операцией является *построение сложной функции*. Рассмотрим две функции: $x = h(t)$ с $D(h) = T$, $E(h) = X$; $y = g(x)$ с $D(g) = X$, $E(g) = Y$. Тогда схема:

$t \xrightarrow{h} x \xrightarrow{g} y$

определяет новую функцию с областью определения T и областью значений Y. Эта новая функция обозначается

$y = g(h(t))$

и называется *сложной функцией*. Заметим, что в определении этой сложной функции участвовали две функции h и g. Поэтому данную сложную функцию называют композицией двух функций h и g.

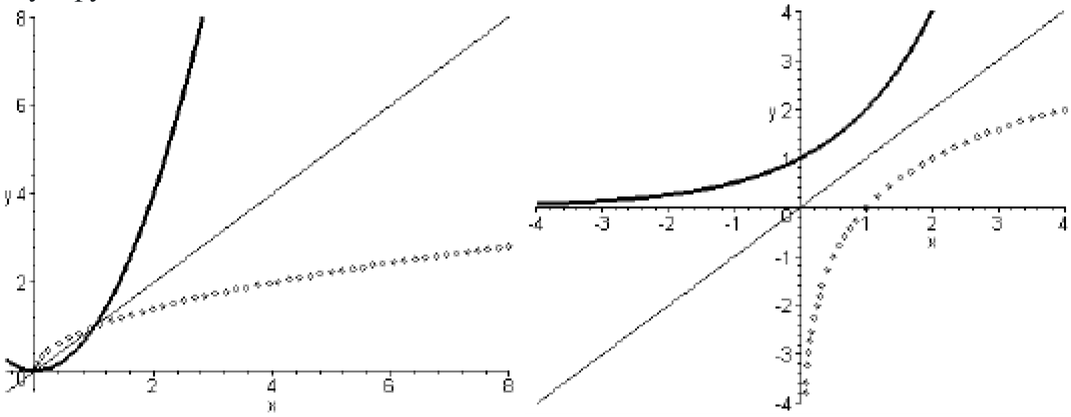


Рис. 5.

Графики взаимно обратных функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ (слева), $y = 2^x$ и $y = \log_2(x)$ (справа)

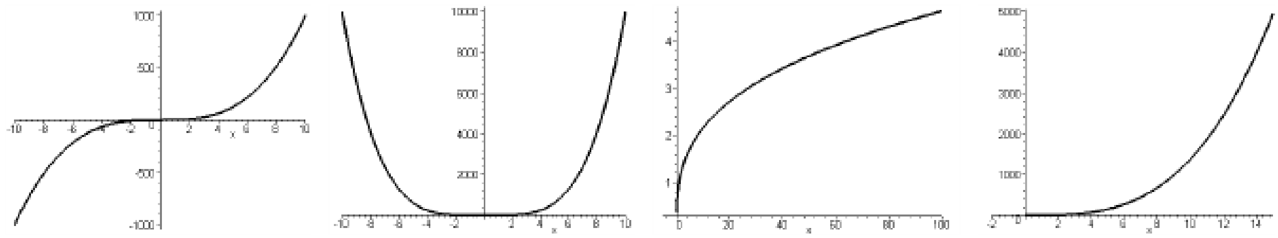
Например, композиция двух функций $y = \ln x$ и $x = 2t - 1$ определяет сложную функцию $y = \ln(2t-1)$. Ее область определения $D(y)$ определяется решением неравенства $2t - 1 > 0$, т.е. $D(y) = (0,5; +\infty)$.

Элементарные функции

В рамках школьной математики были изучены *основные* функции. К ним относятся:

1) *Степенные* функции $y = x^a$,

где *a* - любое действительное постоянное число (рис. 6). Областью определения считается промежуток $x > 0$. Однако, если *a* - натуральное число, то $D(y) = R$.

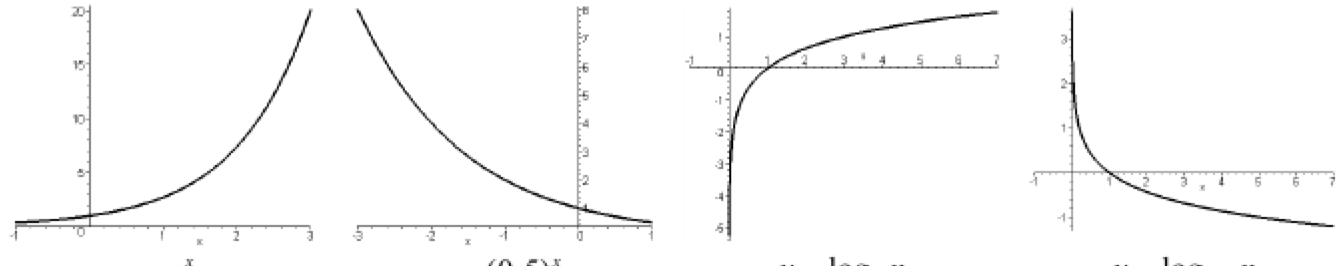


$y = x^3$ $\quad$ $y = x^4$ $\quad$ $y = x^{1/3}$ $\quad$ $y = x^{\pi}$

Рис. 6. Графики степенных функций

2) *Показательные* функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $D(y) = R$ (рис. 7).

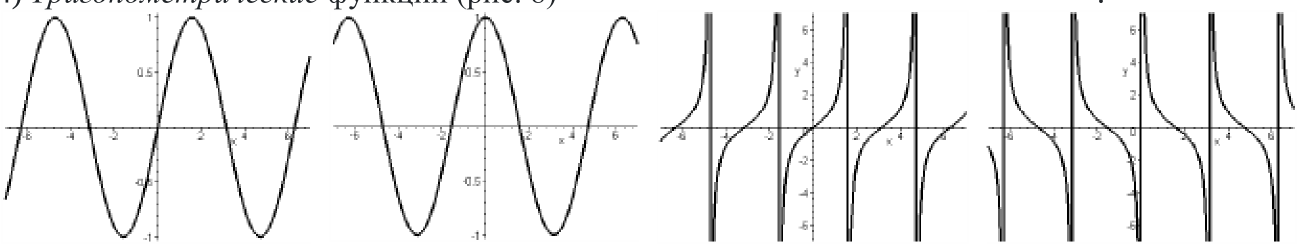
3) *Логарифмические* функции $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $D(y) = (0, +\infty)$ (рис. 7).



$y = e^x$ $y = (0,5)^x$ $y = \log_3 x$ $y = \log_{0,2} x$

Рис. 7. Графики показательных и логарифмических функций

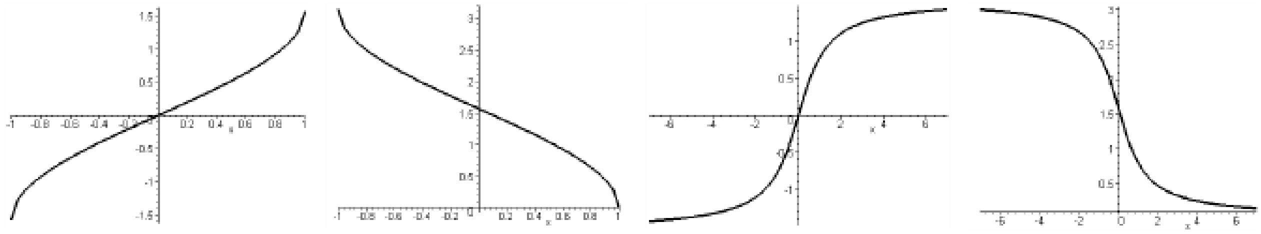
4) *Тригонометрические* функции (рис. 8) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$.



$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \mathrm{tg}\, x$ $y = \mathrm{ctg}\, x$

Рис. 8. Графики тригонометрических функций

5) *Обратные тригонометрические* функции (рис. 9) $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Для первых двух функций - $D(y) = [-1,1]$, для остальных - $D(y) = R$.



$y = \arcsin x$ $y = \arccos x$ $y = \mathrm{arctg}\, x$ $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Рис. 9. Графики обратных тригонометрических функций

Основные функции перечислены. Укажем теперь *допустимые действия* над ними:

1) все арифметические действия: $f + g, f - g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}$;

2) построение сложной функции.

Определение 3. *Элементарными функциями* называются основные функции и полученные из них с помощью допустимых действий.

Например, элементарными функциями являются $y = \sqrt{1 - \ln x}$, $y = \arccos(1 - e^x)$ и т.п. Заметим, что в указанных примерах областью определения функции можно считать ОДЗ или часть ОДЗ.

Формулы прогрессий

Формулы арифметических прогрессий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Арифметическая прогрессия – это последовательность чисел $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$, каждое из которых (начиная со второго) равно сумме предыдущего некоторого постоянного для этой последовательности числа d:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Число d называется разностью арифметической прогрессии. Любой член арифметической прогрессии (если известен ее первый член и разность) вычисляется следующим образом: $a_n = a_1 + d(n-1)$

Сумму первых n членов арифметической прогрессии можно посчитать, используя формулы: $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

или, если известны первый член и разность прогрессии, $S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$

Формулы геометрических прогрессий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Геометрическая прогрессия – это последовательность чисел $\{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$, $b_1 \neq 0$, каждое из которых (начиная со второго) равно произведению предыдущего на некоторое постоянное число q, называемое знаменателем геометрической прогрессии:

$$b_n = b_{n-1} \cdot q$$

Зная первый член и знаменатель геометрической прогрессии любой ее член можно вычислить по формуле: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Если последовательность чисел $\{b_1, b_2, ..., b_n, ...\}$ является геометрической прогрессией, то для любого ее члена выполняется равенство $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

Сумму первых n членов геометрической прогрессии можно посчитать, используя формулу: $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$

Если знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то такая прогрессия называется **бесконечной убывающей геометрической прогрессией** и ее сумма вычисляется по формуле $S_n = \frac{b_1}{1-q}$

Понятия "приращение функции" и "приращение аргумента"

Допустим, x – некоторая произвольная точка, которая лежит в какой-либо окрестности точки x_0. Приращением аргумента в точке x_0 называется разность $x-x_0$. Обозначается приращение следующим образом: Δx.

- $\Delta x = x - x_0$.

Иногда эту величину еще называют приращением независимой переменной в точке x_0. Из формулы следует: $x = x_0 + \Delta x$. В таких случаях говорят, что начальное значение независимой переменной x_0, получило приращение Δx.

Если мы изменяем аргумент, то и значение функции тоже будет изменяться.

- $f(x) – f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) – f(x_0)$.

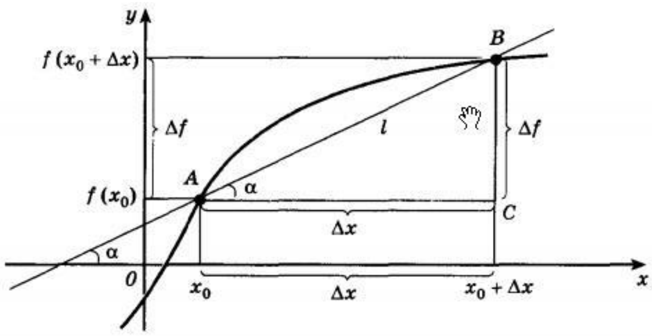
Приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению Δx называется разность $f(x_0 + \Delta x) – f(x_0)$. Приращение функции обозначается следующим образом Δf. Таким образом получаем, по определению:

- $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) – f(x_0)$.

Иногда, Δf еще называют приращением зависимой переменной и для обозначения используют Δy, если функция была, к примеру, $y=f(x)$.

Геометрический смысл приращения

Посмотрите на следующий рисунок.



Как видите, приращение показывает изменение ординаты и абсциссы точки. А отношение приращения функции к приращению аргумента определяет угол наклона секущей, проходящей через начальное и конечное положение точки.

Алгоритм исследования функции

1. Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва).
2. Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения.
3. Найти точки пересечения с осями координат.
4. Установить, является ли функция чётной или нечётной.
5. Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций).
6. Найти точки экстремума и интервалы монотонности.
7. Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости.
8. Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности.
9. Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты.

10. Построить график и асимптоты.

Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

Теорема	Если	то
Ролля	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a,b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a,b); 3. *принимает равные значения на концах отрезка, то есть* $f(a)=f(b)$,	существует хотя бы одна точка ξ, $a<\xi<b$, что $f'(\xi)=0$
Лагранжа	$f(x)$: 1. *непрерывна на отрезке* $[a,b]$; 2. *дифференцируема на интервале* (a,b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a<\xi<b$, что $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$
Коши	$f(x)$ *и* $g(x)$: 1. *непрерывны на отрезке* $[a,b]$; 2. *дифференцируемы на интервале* (a,b); 3. $g'(x)\neq 0$ *во всех точках интервала* (a,b),	существует хотя бы одна точка ξ, $a<\xi<b$, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

№ п/п	Вид неопределенности	Преобразования	Результат преобразований (c, d – const $\neq 0$)
1	$\{0\cdot\infty\}$	$f(x)\cdot h(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{h(x)}}=\dfrac{h(x)}{\frac{1}{f(x)}}$	$\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
2	$\{\infty-\infty\}$	2.1. дроби привести к общему знаменателю; 2.2. умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 2.3. умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 2.4. $f(x)-h(x)=\dfrac{\frac{1}{h(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot h(x)}}$	$\left\{\frac{c}{0}\right\}=\infty$; $\left\{\frac{c}{\infty}\right\}=0$; $\left\{\frac{0}{c}\right\}=0$; $\left\{\frac{\infty}{c}\right\}=\infty$; $\left\{\frac{c}{d}\right\}=A$ $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ – применить правило Лопиталя
3	$\{1^{\infty}\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.	3.1. $y=u^v\Rightarrow \ln y=v\ln u$; $\lim\limits_{x\to a}\ln y=A\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}y=e^A$. 3.2. $y=u^v=e^{v\cdot\ln u}$	См. выше

ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

1. $(const)' = 0;$

степенные функции

2. $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$

2a. $(x)' = 1;$

2b. $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u';$

2c. $(\frac{1}{u})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$

2e. $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{u}} \cdot u';$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}; \quad \frac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u';$

3a. $(e^u)' = e^u \cdot u';$

логарифмические функции

4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u';$

4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$

$(\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b; \quad \ln a^n = n \ln a)$

тригонометрические функции

5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$

6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$

7. $(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$

8. $(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$

обратные тригонометрические функции

9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u';$

11. $(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

12. $(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u';$

гиперболические функции

13. $(sh u)' = ch u \cdot u';$

14. $(ch\, u)' = sh\, u \cdot u';$

15. $(th\, u)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u';$

16. $(cth\, u)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u';$

показательно – степенные функции

17. $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$

модуль функции

18. $|u|' = \operatorname{sgn} u \cdot u'$, $(|u| = \operatorname{sgn} u \cdot u)$,

где $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, u > 0 \\ -1, u < 0; \\ 0, u = 0. \end{cases}$ – функция знак u

(сигнум u).

Правила дифференцирования

1. $(cu)' = c \cdot u';$

1a. $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u';$

2. $(u \pm v)' = u' \pm v';$

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2};$

5. сложная функция

$(F(u(x))' = F_u' \cdot u_x';$

6. параметрически заданная функция

$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow y_x' = \frac{y_t'}{x_t'}; y_{xx}'' = \frac{(y_x')_t'}{x_t'};$

7. ***неявно заданная функция*** $y = y(x)$ уравнением $F(x, y) = 0; \Rightarrow$ чтобы найти производную неявно заданной функции, нужно продифференцировать обе части уравнения $F(x, y) = 0$, считая y функцией от x и применяя правило 5 дифференцирования сложной функции;

8. ***логарифмическое дифференцирование***

$y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x);$

$\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))'.$

ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ $(u = u(x))$

1. $\int 0\,du = c;$

степенные функции

2. $\int u^m du = \dfrac{u^{m+1}}{m+1} + c; m \neq -1;$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c;$

$(\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}};\quad \dfrac{1}{\sqrt[n]{x^m}} = x^{-\frac{m}{n}})$

показательные функции

4. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c;$

4a. $\int e^u du = e^u + c;$

дробные рациональные и иррациональные функции

5. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{u}{a} + c;$

6. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c;$

7. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + c;$

8. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c;$

тригонометрические функции

9. $\int \sin u\, du = -\cos u + c;$

10. $\int \cos u\, du = \sin u + c;$

11. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + c;$

12. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + c;$

гиперболические функции

13. $\int sh\, u\, du = ch\, u + c;$

14. $\int ch\, u\, du = sh\, u + c;$

15. $\int \dfrac{du}{ch^2 u} = th\, u + c;$

16. $\int \dfrac{du}{sh^2 u} = -cth\, u + c;$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)}$$

Непосредственное интегрирование

$du = u'_x dx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{u'};$

$u = ax + b \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax+b)}{a};$

$\int \dfrac{1}{(ax+b)^m} dx = \dfrac{1}{a} \cdot \dfrac{(ax+b)^{1-m}}{1-m} + c;$

$\int \dfrac{dx}{ax+b} = \dfrac{1}{a} \cdot \ln|ax+b| + c;$

$u = (ax^3 + b) \Rightarrow dx = \dfrac{d(ax^3+b)}{3ax^2}$

$\int x^2 cos(ax^3 + b)\,dx = \dfrac{1}{3a} \sin(ax^3 + b) + c;$

$u = mx \Rightarrow dx = \dfrac{d(mx)}{m}$

$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - (mx)^2}} = \dfrac{1}{m} \arcsin\dfrac{mx}{a} + c;$

основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int (u \pm v)dx = \int udx \pm \int vdx;$

2. $\int \alpha u dx = \alpha \int udx;$

3. $d\int u(x)dx = u(x)dx;$

4. $\int du = u + c;$

замена переменной

$u = u(t) \Leftrightarrow du = u'_t dt;$

$\int f(u)du = \int f(u(t))u'_t dt;$

интегрирование по частям

$\int udv = uv - \int vdu.$

Ребята, на прошлом уроке мы с вами изучали перестановки и размещения. Сегодня мы остановимся на одном из самых замечательных применением формулы перестановок.
Числа C_n^k имеют очень красивую и знаменитую запись, которая имеет большое значение. Такая запись называется треугольником Паскаля:

$$C_0^0 = 1$$
$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$
$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$

Правило записи треугольника легко запомнить. **Каждое число в треугольнике паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ними в предыдущей строке.** Давайте распишем несколько строк:

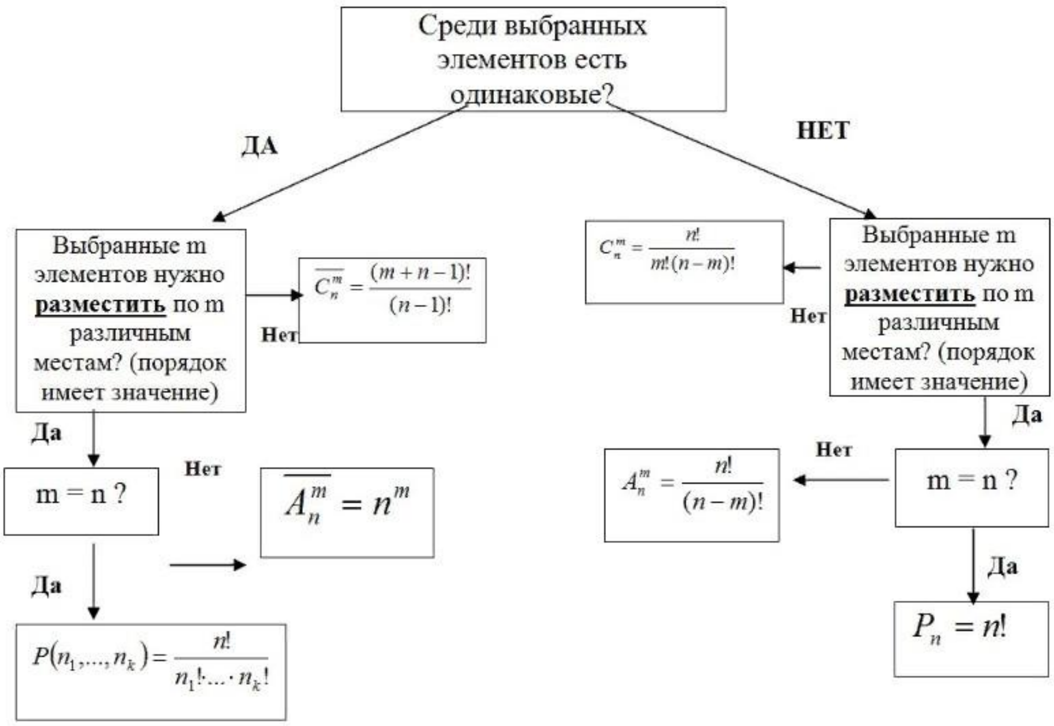
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Полученная нами формула называется "Бином Ньютона".

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n.$$

Коэффициенты, стоящие перед слагаемыми, это **биномиальные коэффициенты**.

ОПОРНЫЙ КОНСПЕКТ ПО РАЗДЕЛУ "КОМБИНАТОРИКА"



Формула Байеса

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)\ P_{A_i}(B)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ P_{A_i}(B)}$$

где

$P_{A_i}(B)$ - вероятность наступления события B, при условии, что произошло одно из событий A_i

Формула Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m\ p^m q^{n-m}$$

где

p - вероятность наступления события A
m - число наступлений события A
n - число испытаний
q = 1 - p

Биномиальный закон распределения

$P(X=m) = C_n^m\, p^m q^{n-m}$

$q = 1 - p \quad 0 < p < 1$

p - вероятность наступления события

$M(X) = np = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

$D(X) = npq$

Геометрический закон распределения

$P(X=m) = p\, q^{m-1}$ $\quad M(X) = \frac{1}{p}$ $\quad D(X) = \frac{q}{p^2}$

M(X), D(X) - математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Неравенство Маркова (лемма Чебышева)

$$P(x > A) \le \frac{M(X)}{A}$$

P (x > A) - вероятность того, что случайная величина x будет больше любого положительного числа A

A - любое положительное число

M (X) - математическое ожидание

Основные Формулы по математической статистике

Генеральной средней называется *среднее арифметическое* всех значений этой совокупности:

$$\bar{x}_Г = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$$

Если среди чисел x_i есть одинаковые *(что характерно для* ***дискретного ряда****)*, то формулу можно записать в более компактном виде:

$$\bar{x}_Г = \frac{x_1 N_1 + x_2 N_2 + x_3 N_3 + \ldots + x_K N_K}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{K} x_i N_i}{N}$$, где

варианта x_1 повторяется N_1 раз;

варианта x_2 – N_2 раз;

варианта x_3 – N_3 раз;

…

варианта x_K – N_K раз.

Выборочной средней называется *среднее арифметическое* всех значений выборки:

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

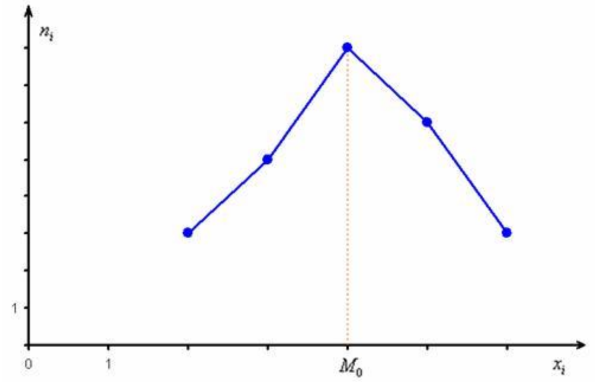
и при наличии одинаковых вариант формула запишется компактнее:

$$\bar{x}_в = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n}$$ – как сумма произведений вариант x_i на соответствующие *частоты* n_i.

Выборочная средняя $\overline{x}_в$ позволяет достаточно точно оценить истинное значение $\overline{x}_Г$, чего вполне достаточно для многих исследований. При этом, чем больше выборка, тем точнее будет эта оценка.

Далее. **Мода и медиана**. Эти понятия тоже вводятся как для генеральной, так и для выборочной совокупности, и определения я сформулирую в общем виде.

Мода. Мода M_0 дискретного вариационного ряда – это *варианта* с максимальной частотой. В данном случае $M_0 = x_3 = 4$. Моду легко отыскать по таблице, и ещё легче на **полигоне частот** – это абсцисса самой высокой точки:



$$M_0 = x_0 + \frac{n_M - n_{M-1}}{(n_M - n_{M-1}) + (n_M - n_{M+1})} \cdot h$$

Иногда таковых значений несколько (с одинаковой максимальной частотой), и тогда модой считают каждое из них.

Если все или почти все *варианты* различны (что характерно для **интервального ряда**), то модальное значение определяется несколько другим способом, о котором во 2-й части урока.

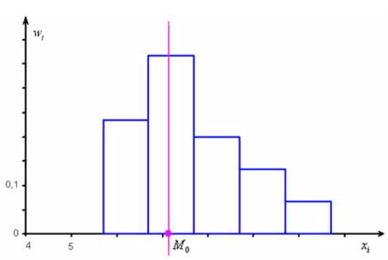
Медиана. Медиана m_e вариационного ряда* – это значение, которая делит его на две равные части (по количеству вариант).

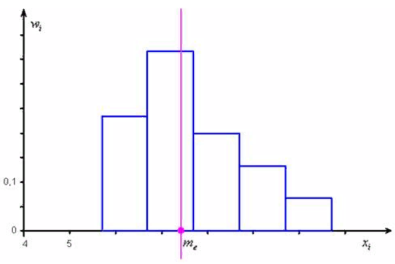
Формула медианы:

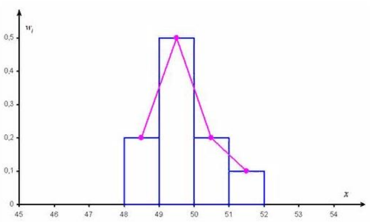
$$m_e = x_0 + \frac{0{,}5n - n^н_{m-1}}{n_m} \cdot h \quad ,$$

** не важно, **дискретного** или **интервального**, генеральной совокупности или выборочной.*

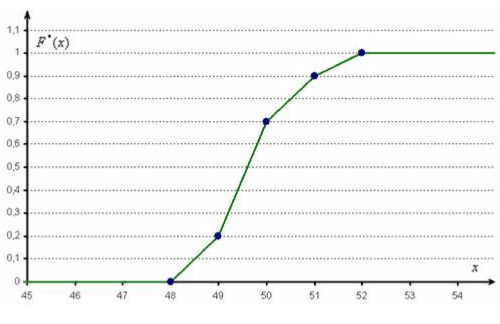
Построим гистограмму и полигон относительных частот:





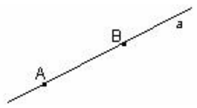


Построим эмпирическую функцию распределения:



Аксиомы стереометрии и следствия из них

Основные фигуры в пространстве: точки, прямые и плоскости.



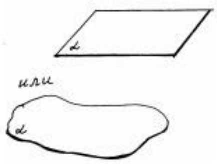


рис. 1 рис. 2 рис. 3

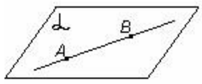
Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

$A \in \alpha$
$B \in \alpha$ (точки А, В, С лежат в плоскости α)
$C \in \alpha$

рис. 4

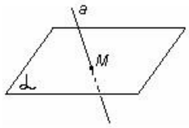
А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости



$AB \subset \alpha$
Прямая АВ лежит в плоскости α

рис. 5

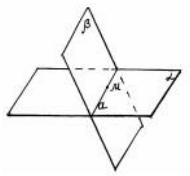
Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



$a \cap \alpha = M$
Прямая а и плоскость α пересекаются в точке М.

рис. 6

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$\alpha \cap \beta = a$
α и β пересекаются по прямой а.

рис. 7

Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Векторы. Основные определения и понятия

Определение

Скалярная величина - величина, которая может быть охарактеризована числом. Например, длина, площадь, масса, температура и т.д.

Вектором называется направленный отрезок $\overline{AB}$; точка A - начало, точка B - конец вектора (рис. 1).

Рис. 1

Определение

Если начало и конец вектора совпадают, то такой вектор называется **нулевым**. Чаще всего нулевой вектор обозначается как $\overline{0}$.

Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых (рис. 2).

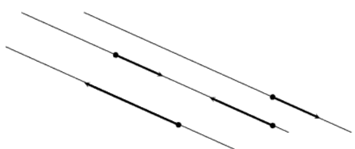


Рис. 2

Определение

Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **сонаправленными**, если их направления совпадают: $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ (рис. 3, а). Два коллинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются **противоположно направленными**, если их направления противоположны: $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ (рис. 3, б).

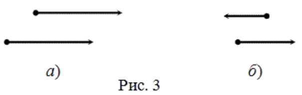


Рис. 3

Определение

Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется расстояние между его началом и концом: $|\overline{AB}|$

Определение

Сложение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ осуществляется по **правилу треугольника**.

Суммой $\overline{a} + \overline{b}$ двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют такой третий вектор $\overline{c}$, начало которого совпадает с началом $\overline{a}$, а конец - с концом $\overline{b}$ при условии, что конец вектора $\overline{a}$ и начало вектора $\overline{b}$ совпадают (рис. 1).

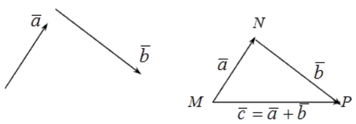


Рис. 1

Определение

Вектор $-\overline{a}$ называется **противоположным вектором** к вектору $\overline{a}$, если он коллинеарен вектору $\overline{a}$, равен ему по длине, но направлен в противоположную сторону вектору $\overline{a}$.

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ - коммутативность
$(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$ - ассоциативность
$\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$
$\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$

Три компланарных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, приведенных к общему началу, образуют так называемую **связку трех векторов** (или **тройку векторов**).

Тройка векторов называется **упорядоченной**, если четко сказано, какой вектор в ней идет первым, и так далее.

Тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется **левой**, если поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$, видимый с конца третьего вектора $\overline{c}$, осуществляется по ходу часовой стрелки (рис. 1).

Тройка векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ называется **правой**, если поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$, видимый с конца третьего вектора $\overline{c}$, осуществляется против хода часовой стрелки (рис. 2).

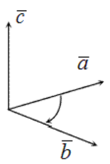


Рис. 1

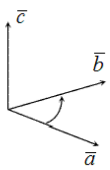


Рис. 2

Определение

Векторы называются **компланарными**, если они параллельны одной плоскости или лежат в одной плоскости (рис. 4).

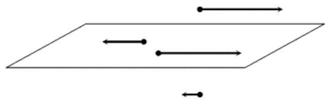


Рис. 4

Два вектора всегда компланарны.

Определение

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором** или **ортом**.

Векторы называются **равными**, если они лежат на одной или параллельных прямых; их направления совпадают и длины равны.

Иначе говоря, два вектора **равны**, если они коллинеарны, сонаправлены и имеют равные длины:

$\overline{a} = \overline{b}$, если $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}, |\overline{a}| = |\overline{b}|$

Определение

Правило параллелограмма - если два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ привести к общему началу, то вектор $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (рис. 2). Причем начало вектора $\overline{c}$ совпадает с началом заданных векторов.

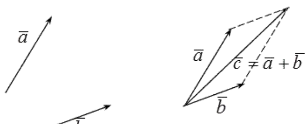


Рис. 2

Определение

Разностью $\overline{a} - \overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$ такой, что выполняется условие: $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$ (рис. 3).

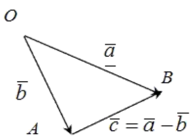


Рис. 3

Определение

Произведением $\alpha\overline{a}$ вектора $\overline{a}$ на число α называется вектор $\overline{b}$, удовлетворяющий условиям:

$\overline{b} \| \overline{a}$
$|\overline{b}| = |\alpha||\vec{a}|$
$\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$, если $\alpha > 0$, $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$, если $\alpha < 0$.

Свойства умножения вектора на число:

$(\alpha \pm \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} \pm \beta\overline{a}$
$\alpha(\overline{a} \pm \overline{b}) = \alpha\overline{a} \pm \alpha\overline{b}$
$\alpha(\beta\overline{a}) = (\alpha\beta)\overline{a} = \beta(\alpha\overline{a})$
$1 \cdot \overline{a} = \overline{a}$
$-1 \cdot \overline{a} = -\overline{a}$
$0 \cdot \overline{a} = \overline{0}$

Здесь $\overline{a}$ и $\overline{b}$ - произвольные векторы, α, β - произвольные числа.

Определение

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = \bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos(\bar{a}, \bar{b})$$

Определение

Длиной (модулем) вектора $\overline{AB}$ называется неотрицательное число, равное расстоянию между его началом и концом, то есть длина вектора - это длина отрезка AB. Длина $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$

Определение

Векторным произведением ненулевых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c}$, обозначаемый символом $[\bar{a}, \bar{b}]$ или $\bar{a} \times \bar{b}$, длина которого $|\bar{c}| = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin(\bar{a}, \bar{b})$ (рис. 1).

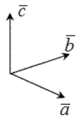


Рис. 1

Определение

Представление $\bar{c} = m\bar{a} + n\bar{b}$ называется **разложением вектора** $\bar{c}$ **по компонентам** $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, то приведенное представление единственно.

Для трех попарно неколлинеарных векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ и произвольного вектора $\bar{d}$ существует единственное разложение: $\bar{d} = m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Определение

Длина вектора, заданного координатами, равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Определение

Углом между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется угол $\phi = \angle AOB = (\bar{a}, \bar{b})$.

Угол между сонаправленными векторами равен 0°, а между противоположно направленными - 180°.

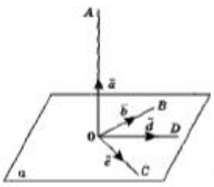
Определение

Два вектора называются **перпендикулярными** или **ортогональными**, если угол между ними равен 90°.

«Векторный и координатный методы при решении задач»

Доказательство теоремы, выражающей признак перпендикулярности прямой и плоскости, в учебнике занимает целую страницу. Векторный метод при доказательстве некоторых утверждений имеет несомненное преимущество.

ТЕОРЕМА 1 (признак перпендикулярности прямой и плоскости)



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Дано: $OA \perp OB$, $OA \perp OC$, $OB \cap OC = O$, $OB \in \alpha$, $OC \in \alpha$.

Доказать: $OA \perp \alpha$.

Доказательство.

1) Пусть OD – произвольная прямая плоскости α.
2) Возьмем на прямых OA, OB, OC, OD ненулевые векторы, выходящие из точки O, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$.
3) Вектора $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ лежат в одной плоскости. Разложим вектор $\vec{d}$ по двум неколлинеарным векторам, т.е.

$$\vec{d} = x\vec{b} + y\vec{c}. \qquad (*)$$

4) Докажем, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$ перпендикулярны.
Умножая скалярно вектор $\vec{a}$ на обе части равенства (*), получаем

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = \vec{a}(x\vec{b} + y\vec{c}),$$
$$\vec{a}\,\vec{d} = x(\vec{a}\,\vec{b}) + y(\vec{a}\,\vec{c}).$$

5) Так как $OA \perp OB$, то $\vec{a}\,\vec{b} = 0$; $OA \perp OC$, то $\vec{a}\,\vec{c} = 0$. Таким образом,

$$\vec{a} \cdot \vec{d} = x \cdot 0 + y \cdot 0,$$
$$\vec{a}\,\vec{d} = 0.$$

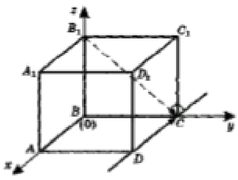
Следовательно, прямая OD перпендикулярна прямой OA. Так как OD – произвольная прямая плоскости α, то согласно определению прямой, перпендикулярной плоскости, получаем, что $OA \perp a$.

Приведем векторный способ доказательства теоремы о трех перпендикулярах.

ТЕОРЕМА 2 (о трех перпендикулярах)

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и самой наклонной.

Дано: $BB_1 \perp (ABC)$, B_1C – наклонная,
BC – проекция наклонной, $CD \perp BC$.



Доказать: $CD \perp B_1C$.

Доказательство.

1) Введем прямоугольную систему координат так:
AB лежит на оси Ox; BC – на оси Oy; BB_1 – на оси Oz; B – начало отсчета.

2) Пусть $\overrightarrow{DC}$ – направляющий вектор прямой CD, $\overrightarrow{B_1C}$ – направляющий вектор прямой B_1C.

3) Положим, что ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1, тогда $B_1(0;\ 0;\ 1)$, $C\,(0;\ 1;\ 0)$, $D\,(1;\ 1;\ 0)$.

4) Найдем координаты векторов: $\overrightarrow{DC}\{-1;\ 0;\ 0\}$, $\overrightarrow{B_1C}\{0;\ 1;\ -1\}$.

5) Тогда

$$\cos\angle(\overrightarrow{CD}; \overrightarrow{B_1C}) = \frac{|-1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = 0.$$

Значит, $\angle(CD; B_1C) = 90°$, т. е. $CD \perp B_1C$.

Практическое занятие №1

1. Наименование работы *Операции над числами. НОК и НОД.*
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: уметь находить НОД и НОК чисел разными способами; находить значение выражений, содержащих степени; знать признаки делимости; простые и составные числа.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения (см. выше с. 10-40).
6. Задание. 1 Делимость чисел

Вариант 1
1. Из данных чисел 1320, 1559, 2038, 2259, 4759, 5940 выберите числа, которые
а) делятся на 10;
б) делятся на 3;
в) делятся на 2.
2. Какие цифры можно поставить вместо *, чтобы
а) число *4433255 делилось на 3;
б) число *38456 делилось на 9.
3. Из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $1495 < x < 1517$, выберите числа, кратные 2 и 3.
4. Решите уравнение:
$(37x + 297) : 13 + 36 = 167$.
5. Составьте все трехзначные числа, кратные 3, используя без повторений цифры 1, 4 и 7. Запишите их в порядке убывания.
6*. Найти сумму цифр, которые должны стоять вместо звездочек в равенстве $*24 \times 4* = 45276$.

Вариант 2
1. Из данных чисел 3120, 4151, 4680, 5463, 6467, 8594 выберите числа, которые
а) делятся на 9;
б) делятся на 5;
в) делятся на 3.
2. Какие цифры можно поставить вместо *, чтобы
а) число 6*243196 делилось на 3;
б) число 97*137 делилось на 9.
3. Из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $1712 < x < 1741$, выберите числа, кратные 2 и 9.
4. Решите уравнение:
$(47x + 179) : 6 - 10 = 200$.
5. Составьте все трехзначные числа, кратные 3, используя без повторений цифры 1, 6 и 8. Запишите их в порядке возрастания.
6*. Найти сумму цифр, которые должны стоять вместо звездочек в равенстве $37* \times 5* = 21830$.

Задание. 2 Разложение чисел на простые множители. НОД и НОК

Вариант 1
1. Разложите на простые множители числа:
а) 44;
б) 455.
2. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 660 и 560.
3. Запишите в порядке возрастания все правильные дроби со знаменателем 16, в которых числитель и знаменатель - взаимно простые числа.
4. Найдите значение выражения и выпишите все делители этого числа:
$12{,}2 \cdot 13{,}2 - 0{,}268:6{,}7$.
5. Какие цифры можно поставить вместо *, чтобы число *955965 делилось на 9?
6*. Сколько делителей у числа 7425?

Вариант 2
1. Разложите на простые множители числа:
а) 225;
б) 72.
2. Найдите наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 780 и 120.
3. Запишите в порядке возрастания все неправильные дроби с числителем 8, в которых числитель и знаменатель - взаимно простые числа.
4. Найдите значение выражения и выпишите все делители этого числа:
$7{,}1 \cdot 13{,}4 - 0{,}728:5{,}2$.
5. Какие цифры можно поставить вместо *, чтобы число 8819*119 делилось на 3?
6*. Сколько делителей у числа 2160?

ответ

Делимость чисел.

№	Вопрос 1	Вопрос 2	Вопрос 3	Вопрос 4	Вопрос 5	Вопрос 6*
Вар 1	а) 1320; 5940 б) 1320; 2259; 5940 в) 1320; 2038; 5940	а) 1; 4; 7 б) 1	1500; 1506; 1512	$(37x + 297) : 13 = 131$ $37x + 297 = 1703$ $37x = 1406$ $x = 38$	741, 714, 471, 417, 174, 147	$9 + 9 =$ $= 18$

Делимость чисел.

№	Вопрос 1	Вопрос 2	Вопрос 3	Вопрос 4	Вопрос 5	Вопрос 6*
Вар 2	а) 4680; 5463 б) 3120; 4680 в) 3120; 4680; 5463	а) 2; 5; 8 б) 9	1728	$(47x + 179) : 6 = 210$ $47x + 179 = 1260$ $47x = 1081$ $x = 23$	168, 186, 618, 681, 816, 861	$0 + 9 =$ $= 9$

Разложение чисел на простые множители. НОК и НОД.

№	Вопрос 1	Вопрос 2	Вопрос 3	Вопрос 4	Вопрос 5	Вопрос 6
Вар 1	а) $44=2^2\cdot 11$ б) $455=5\cdot 7\cdot 13$	$660=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 11$ $560=2^4\cdot 5\cdot 7$ НОД$=2^2\cdot 5=20$ НОК$=2^4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11=18480$	$^1/_{16}$ $^3/_{16}$ $^5/_{16}$ $^7/_{16}$ $^9/_{16}$ $^{11}/_{16}$ $^{13}/_{16}$ $^{15}/_{16}$	$12{,}2\cdot 13{,}2-0{,}268:6{,}7=161$; 1; 7; 23; 161	6	$7425=3^3\cdot 5^2\cdot 11$ к.д$=(3+1)(2+1)(1+1)$ $=24$

Разложение чисел на простые множители. НОК и НОД.

№	Вопрос 1	Вопрос 2	Вопрос 3	Вопрос 4	Вопрос 5	Вопрос 6
Вар 2	а) $225=3^2\cdot 5^2$ б) $72=2^3\cdot 3^2$	$780=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 13$ $120=2^3\cdot 3\cdot 5$ НОД$=2^2\cdot 3\cdot 5=60$ НОК$=2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 13=1560$	$^8/_1$ $^8/_3$ $^8/_5$ $^8/_7$	$7{,}1\cdot 13{,}4-0{,}728:5{,}2=95$; 1; 5; 19; 95	2; 5; 8	$2160=2^4\cdot 3^3\cdot 5$ к.д$=(4+1)(3+1)(1+1)$ $=40$

7. Контрольные вопросы
1. Дать определения НОД и НОК
2. в каких задачах применяются НОК и НОД.

Практическое занятие №2

1. Наименование работы Проценты. Задачи на проценты..
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: уметь применять алгоритмы решения базовых задач на проценты:
а)нахождение процентов от заданного числа (величины);
б)нахождение неизвестного числа по его процентам;
в)нахождение процентов одного числа от другого.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Вариант 1

1. За активную общественную деятельность студенту увеличили стипендию на «а»%. Величина стипендии-1050 рублей. Какую стипендию теперь получит активный студент? (Значение «а» выберите сами).

2. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 12%.Сколько ему достанется, если стипендия 800 рублей?
3. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
4. В магазине мультиварка продается со скидкой 20% за 4500 рублей. Какова первоначальная цена мультиварки?
5. Грибы при сушке теряют 78% своей массы. Сколько сушеных грибов получится из 100 кг свежих?
6. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 21000 рублей?
7. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1250 рублей, если размер скидки 30%?
8. В декабре шуба стоила 38 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 20%, а в мае снизили на 15%, в июле была распродажа со скидкой 30%. Сколько теперь стоит шуба?

Вариант 2

1. За активную общественную деятельность студенту увеличили стипендию на «а»%. Величина стипендии-1000 рублей. Какую стипендию теперь получит активный студент? (Значение «а» выберите сами).
2. За пропуски занятий студенту уменьшили стипендию на 16%.Сколько ему достанется, если стипендия 900 рублей?
3. На сколько рублей повысится квартплата, составляющая 3500 рублей, если с 1 сентября она должна увеличиться на 7 %?
4. В магазине продается блендер со скидкой 10% за 2500 рублей. Какова первоначальная цена блендера?
5. Укроп при сушке теряет 86% своей массы. Сколько сушеного укропа получится из 1 кг свежего?
6. Какова величина подоходного налога, который составляет 13% от величины заработной платы в 30000 рублей?
7. Сколько рублей составляет скидка на товар от его цены в 1280 рублей, если размер скидки 15%?
8. В декабре шуба стоила 35 тыс. рублей, в сезон цену повысили на 15%, а в мае снизили на 10%, в июле была распродажа со скидкой 20%. Сколько теперь стоит шуба?

7. Контрольные вопросы

Какие 3 вида задач на проценты встречаются на практике

Практическое занятие №3

1. Наименование работы Преобразование выражений, содержащих степени и корни.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Проверить знания и практические умения студентов по преобразованию алгебраических, рациональных, иррациональных, степенных выражений.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение Наглядные пособия и раздаточный материал: методические указания для практической работы №2,

плакаты: «Свойства степени», «Свойства корня n-ой степени», «Формулы сокращенного умножения»
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

ВАРИАНТ - I	ВАРИАНТ - II
1. Упростите выражение: $\left(\frac{2m+1}{2m-1}-\frac{2m-1}{2m+1}\right)\div\frac{4m}{10m-5}$	1. Упростите выражение: $\frac{x+3}{x^2+3}\cdot\left(\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}\right)$
2. Найдите значение выражения: $\frac{2^8\cdot7^9}{14^{10}}\cdot\frac{26^5\cdot2^{10}}{13^6\cdot8^4}$	2. Найдите значение выражения: $\frac{12^5}{2^3\cdot4^4}$
3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня $c^{\frac{2}{3}}, m^{\frac{1}{2}}, d^{-\frac{3}{7}}$	3. Представьте степень с дробным показателем в виде корня $x^{\frac{3}{4}}, y^{-\frac{5}{4}}, z^{\frac{1}{3}}$
4. Привести указанное выражение к виду $a\sqrt[n]{b}$, где a -рациональное число, b – натуральное число $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{5}}$	4. Привести указанное выражение к виду $a\sqrt[n]{b}$, где a- рациональное число, b – натуральное число $\frac{8}{\sqrt{10}}, \frac{b}{\sqrt{12}}$
5. Упростить: $\sqrt[3]{2a}\cdot\sqrt[3]{4a}$; $\sqrt{121\cdot36}$	5. Упростить: $\sqrt{\frac{3}{25}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$
6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем $\sqrt[11]{2a^3}, \sqrt[10]{x}, \sqrt[3]{b^2}$	6. Замените арифметические корни степенями с дробным показателем $\sqrt[13]{n^8}, \sqrt[7]{2^6}, \sqrt[3]{t^5}$
7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня $\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$	7. Представьте выражение в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня $\frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}$
8. Сократите дробь $\frac{b-9}{\sqrt{b}+3}$	8. Сократите дробь $\frac{\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}-1}$
9. Выполните действие $(\sqrt{8}-\sqrt{24})\cdot\sqrt{2}$	9. Выполните действие $\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-\sqrt{22})$
10. Выполните действие: $\frac{5y^2}{1-y^2}\div\left(1-\frac{1}{1-y}\right)$	10. Выполните действие: $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{1+x}{2x-1}$

7. Контрольные вопросы
Записать формулы, которыми пользовались при решении примеров из работы

Практическое занятие №4

1. Наименование работы Логарифмы. Переход к новому основанию.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы:
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1 вариант	2 вариант
1. Найдите значение числового выражения: $\log_3 27-\log_{\sqrt{3}}27-\log_{\frac{1}{3}}27-\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{64}{27}\right)$	1. Найдите значение числового выражения: $\left(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{\frac{1}{4}}+6\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}\right)-2\log_{\frac{1}{16}}\left(\frac{1}{4}\right)\right)\div\log_{\sqrt{2}}\sqrt[5]{8}$
2. Вычислите: а) $2\log_6 2+\log_6 9$; б) $\log_{11}484-2\log_{11}2$; в) $3^{\log_{\sqrt[3]{9}}4}+2^{\frac{1}{\log_{16}4}}$	2. Вычислите: а) $\log_5 100-2\log_5 2$; б) $4\log_{12}2+2\log_{12}3$; в) $3^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{3}{2}}+\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{\log_2 3}{\log_2 9}}$
3. Найдите $\log_5 72$, если известно, что $\log_5 2=a, \log_5 3=b$.	3. Вычислите $\log_5 30$, если известно, что $\log_5 2=a, \log_5 3=b$.
4. Вычислить:	4. Вычислить:

а) $(\log_7 15 + \log_7 4 - \log_7 6) \cdot \lg 7$;	а) $\lg 2 \cdot (\log_2 75 - \log_2 15 + \log_2 20)$;
б) $\frac{1}{2}\log_7 36 - \log_7 14 - 3\log_7 \sqrt[3]{21}$	б) $\log_8 12 - 2\log_8 \sqrt{15} + \log_8 20$

7. Контрольные вопросы
Какие применяли формулы для решения примеров

Практическое занятие №5
1. Наименование работы Решение логарифмических уравнений и неравенств.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Определение типов логарифмических уравнений и методов их решения, решение простейших логарифмических неравенств.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1 вариант	2 вариант
1. Решить уравнения:	1. Решить уравнения:
а) $\log_5(3x - 4) = \log_5(12 - 5x)$.	а) $\log_2(4x + 5) = \log_2(9 - 2x)$.
в) $\log_2 x + 2\log_4 x + 3\log_8 x + 4\log_{16} x = 4$;	в) $\log_3 x + 2\log_9 x + 3\log_{27} x + 4\log_{81} x = 8$;
г) $\log_{\frac{1}{4}}(2x^2 - 7x - 6) = -2$;	г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 17x + 9) = -3$;
д) $3\lg^2 x - 5\lg x + 2 < 0$.	д) $5\lg^2 x + \lg x - 1 < 0$.
е) $\log_3(x^2 + 3x - 7) > 1$.	е) $\log_3(x^2 - 5x - 23) > 0$.
ж) $\lg(x - 1) + \lg(x + 1) > \lg(9x + 9)$.	ж) $\lg(x + 2) + \lg(x - 2) > \lg(5x + 10)$.
з) $2\log_4^2 x + 5\log_4 x - 3 < 0$;	з) $\log_3^2 x - \log_3 x - 6 < 0$;

7. Контрольные вопросы
В каких областях применяются логарифмы

Практическое занятие №6
1. Наименование работы Решение показательных уравнений и неравенств.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Определение типов показательных уравнений и методов их решения, решение простейших показательных неравенств.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

1 вариант	2 вариант
1. Решить уравнения: **а.** $7^x = 49$; **б.** $8^{x^2-2} = 64^x$; **в.** $5^{x-4} = 1$ **г.** $25^x = 7^{2x}$	1. Решить уравнения: **а.** $2^{4x} = 8$; **б.** $9^{x-5} = 1$; **в.** $6^{4x^2-2x} = 36$ **г.** $27^x = 5^{3x}$
2. Решите уравнение: $\left(\frac{16}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^5$	**2. Решите уравнение:** $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+2} = \left(\frac{5}{2}\right)^6$
3. Найдите сумму корней уравнения $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$	**3. Найдите сумму корней уравнения** $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$
4. Решите неравенства: **а.** $2^x \geq 4$ **б.** $0{,}6^{x^2+3x} \geq 0{,}6^0$	**4. Решите неравенства:** **а.** $2^x \leq 8$ **б.** $0{,}3^{x+4} \leq 0{,}3^2$
5. Найдите наибольшее целое решение неравенства $2^x + 2^{x+2} \leq 20$	**5. Найдите наименьшее целое решение неравенства** $3^x + 3^{x+2} > 30$

7. Контрольные вопросы
Какие применяли формулы

Практическое занятие №7

1. Наименование работы Преобразование алгебраических выражений.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: отработать умения и навыки по преобразованию алгебраических, рациональных и иррациональных выражений
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1.Разложите многочлен на множители:
$35x^2 + 7x^2y^2 + 5y + y^3$

2.Сократите дробь:
$\frac{5x^2 - 12x + 4}{6 - 15x}$

3.Упростите выражение:

а) $\frac{x-y}{x3} - \frac{\frac{5y}{x^2} * x^2 - xy}{5y}$;

б) $\frac{y^2}{y^{2-1}} + \frac{1}{y^2-1} \div \left(\frac{2}{2y-y^2} - \frac{1}{2-y}\right)$

в) $\frac{x+3}{x^2+9} * \left(\frac{x+3}{x-3} + \frac{x-3}{x+3}\right)$.

4.Найдите значение выражения:

а) $\left(75 \div 4\frac{1}{6} - 3\frac{9}{23} * 3\right) * \left(1\frac{5}{18} + 0.35 - \frac{11}{15}\right) \div 1.4$;

б) $\frac{\sqrt{1.5} * \sqrt{1.8}}{\sqrt{0,3}}$;

в) $\left(\sqrt{2\frac{6}{7}} - \sqrt{6\frac{3}{7}}\right) \div \sqrt{\frac{5}{28}}$.

5.Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{\sqrt{10}-\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{\sqrt{10}+\sqrt{6}}$.

7. Контрольные вопросы

Какими формулами пользовались при решении данных примеров

Практическое занятие №8

1. Наименование работы Основное тригонометрическое тождество. Формулы приведения.

2. Продолжительность проведения – *3 часа*

3. Цель практической работы: Закрепить основные тригонометрические тождества

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

1. Упростите выражения:

1) $\sin^2 x - 1$; 5) $(\cos x - 1)\cdot(1+\cos x)$; 9) $\sin x \cdot \cos x \cdot ctgx - 1$;

2) $\cos^2 x + (1 - \sin^2 x)$; 6) $1 - \sin^2 x - \cos^2 x$; 10) $\sin^2 x - tgx \cdot ctgx$.

3) $\sin^2 x + 2\cos^2 x - 1$; 7) $\cos^2 x - (1 - 2\sin^2 x)$;

4) $(1 - \sin x)\cdot(1+\sin x)$; 8) $\sin x \cdot \cos x \cdot tgx$;

2. Преобразуйте выражения:

$\sin x \cdot ctgx$;

$\cos x \cdot tgx$;

$\frac{\sin x}{tgx}$;

$\frac{tgx}{ctgx}+1$;

$\frac{\sin^2 x - 1}{1-\cos^2 x}$

3. Упростите выражение:

$ctgx - \frac{\cos x - 1}{\sin x}$;

$\frac{1}{\sin x - 1}+\frac{1}{1+\sin x}$.

4. Вычислите:

Найдите значение $tg\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

Найдите значение $tg\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

Найдите значение $ctg\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{7}}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

7. Контрольные вопросы

Какие формулы применялись в вычислениях

Практическое занятие №9

1. Наименование работы Простейшие тригонометрические уравнения. Однородные тригонометрические уравнения.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Закрепить навыки решения простейших тригонометрических уравнений.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1.Вычислить

$\arcsin\frac{1}{2} =$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$arctg\sqrt{3} =$

$arcctg(-1) =$

2.Упростить

$1-\cos^2 x =$

$1-\sin^2 x =$

3.Решить уравнения:

1. $2\sin x + \sqrt{2} = 0$
2. $\sqrt{3}tgx - 1 = 0$
3. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 = 0$
4. $2\cos\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = \sqrt{2}$

7. Контрольные вопросы

Запишите формулы приведения

Какие методы знаете для решения однородных тригоном. уравнений

Практическое занятие №10

1. Наименование работы Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: применить умения в упрощении тригонометрических выражений, применяя основные формулы тригонометрии для вычисления значений.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1. Вычислить, используя формулы приведения, сложения:

а) $2\sin\frac{2\pi}{3} - \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} =$

б) $\sin 56^0 \cos 34^0 + \cos 56^0 \sin 34^0 =$

2. Известно, что $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите $\sin 2\alpha$.

3. Упростить выражения:

а) $\mathrm{tg}^2\,\alpha + \sin^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha} =$

б) $\dfrac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha} + 2\sin^2\alpha =$

4. Доказать тождество: $1 - \mathrm{tg}^2\alpha = \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

5. Найдите значение *x* (в радианах), если x находится в первой четверти и

$\sin 32^0 + \sin 28^0 = 2\sin x \cos 2^0$

6. Вычислите без помощи таблиц:

$$\frac{\sin 10^0 \cos 20^0 + \cos 10^0 \sin 20^0}{\cos 19^0 \cos 11^0 - \sin 19^0 \sin 11^0}$$

7. Контрольные вопросы

Какими формулами пользовались при вычислении

Практическое занятие №11

1. Наименование работы Преобразование тригонометрических выражений.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: закрепить навыки применения тригонометрических формул при вычислении значений тригонометрических функций и преобразовании выражений, содержащих тригонометрические функции.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1. Перевести:

а) из градусной меры в радианную : 348^0; 66^0; 200^0;

б) из радианной меры в градусную: $\frac{\pi}{9}$; $\frac{5\pi}{3}$; 7.

2. Найти значение выражения:

а) $3\sin\frac{\pi}{6} + 5\cos\frac{\pi}{3}$

б) $\sin 69^0 \cdot \cos 21^0 + \sin 21^0 \cdot \cos 69^0$

в) $\dfrac{\sin 70^0 + \sin 10^0}{\cos 70^0 - \cos 10^0}$

**г)* $2\cos^2 15^0 \cdot tg 15^0$

3. Вычислить значение каждой из тригонометрических функций, если $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$ *и* $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

4. Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + tg^2\beta$

б) $\sin(\alpha - 30^0) + \cos(60^0 + \alpha)$

в) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

**г)* $\dfrac{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} - (\cos\alpha - \sin\alpha)^2$.

5. Используя формулы приведения:

Вычислить: а) $\sin 300^0$; б) $\sin 330^0 + tg\, 240^0$

Упростить выражение: в) $\dfrac{tg(\pi+\alpha)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$; $\quad$ * г) $ctg\,\frac{21\pi}{4} \cdot \cos\frac{11\pi}{3}$

7. Контрольные вопросы

Запишите основное тригонометрическое тождество

Какие формулы можно вывести из основного тождества и простейших выражений

Практическое занятие №12

1. Наименование работы Арифметические операции над функциями. Сложная функция.

2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: закрепить понятия «график функции», «функциональная зависимость», основные примеры функциональной зависимости
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1. Для функций $f(x)$ и $g(x)$ составить композиции $f(g(x)$ и $g(f(x))$ и найти их области определения и множества значений:

(1) $f(x) = 1 - x^2$, $g(x) = \ln x$, (2) $f(x) = \ln x$, $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$,

(3) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = 2^x$, (4) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $g(x) = 2^x$.

2. Изучить обратимость следующих функций и найти обратные к ним. В случае отсутствия обратимости на всей области определения выделить области обратимости и найти соответствующие обратные функции.

(1) $\dfrac{x}{x+1}$, (2) $x^2 + x$, (3) $x - \dfrac{1}{x}$, (4) $\dfrac{x}{x^2+1}$.

3. **Для функции $y = f(x)$, где $f(x) = \sin x$, найдите:**

1. а) $f(\pi)$; б) $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; в) $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; г) $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. а) $f(-x)$; б) $f(2x)$; в) $f(x+1)$; г) $f(x) - 5$.

7. Контрольные вопросы
Что такое функция, где она применяется, ее значимость

Практическое занятие №13
1. Наименование работы Графики функций y=sin x, y=cos x, свойства, движение.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Показать умение строить графики сложных функций с использованием параллельного переноса, растяжения, сжатия, симметрии относительно осей координат графиков известных функций, показать построение графиков, содержащих модуль, а также с последовательным применением нескольких способов
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.
Пример 1
Найдем наименьшее и наибольшее значения функции: а) $y = 3\sin x - 1$; б) $y = \dfrac{7}{4} - \cos^2 x + \sin x$.
Пример 2

Построим график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
Пример 3
Построим график функции $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$.
Пример 4
Найдем область определения и область значений функции:

а) $y = 3\sin|x|$;
б) $y = -2\cos\sqrt{x^2 - 2x}$;
в) $y = 5\sin\frac{1}{x}$;
г) $y = -4\cos\frac{\pi x}{1 + x^2}$.

Пример 5
Установим четность или нечетность функции:

а) $y(x) = 3\sin x\cos x$;
б) $y(x) = 2\sin|x| + 3\cos x$;
в) $y(x) = 3\sin x\cos^2 x + 1$;
г) $y(x) = \frac{\cos x}{x - 2}$.

Пример 6
Построим график функции $y = \sqrt{4 - 4\cos 2x}$.
Пример 7
Построим график уравнения cos(x2 + y2) = 1.

7. Контрольные вопросы
   1. Основные свойства и график функции y = sin x.
   2. Функция y = cos x, ее свойства и график.

Практическое занятие №14
1. Наименование работы Преобразование графиков.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: закрепить умения строить графики тригонометрических функций, определять свойства функции по графику, изменение графиков тригонометрических функций в зависимости от изменения функции и аргумента, преобразования графиков функций.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.
   1. Построить график функции *y = cos x* и записать его свойства.
   2. Построить график функции *y = sin x* и записать его свойства.
   3. Построить график функции *y = tg x* и записать его свойства.
   4. **Постройте график функции** $y = \sin x - 1$;
   5. **Постройте график фукнции** $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$;
   6. **Постройте график функции** $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$;

7. Контрольные вопросы
Какие преобразования можно совершить с графиком функции

Практическое занятие №15
1. Наименование работы Графики функций y=tg x, y=ctg x, свойства, движение.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: закрепить умения строить графики тригонометрических функций, определять свойства функции по графику, изменение графиков тригонометрических функций в зависимости от изменения функции и аргумента, преобразования графиков функций.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Пример 1

Установим четность или нечетность функции:

а) $y(x) = 3\operatorname{tg}^4 2x - 2\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{3} + 5\cos x;$

б) $y(x) = 2\operatorname{tg}^3 4x + 3\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2} \sin x;$

в) $y(x) = \dfrac{7\cos x}{\operatorname{tg}^3 x + 1}.$

Пример 2

Найдем основной период функции $y(x) = 7\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + 2\sin 3x - 5\cos 2x.$

Пример 3

Построим график функции $y = 2\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

Пример 4

Построим график функции $y = \operatorname{tg}\left(|x| - \left|x - \dfrac{\pi}{4}\right|\right).$

Пример 5

Найдем область определения и область значений функции $y = 2\operatorname{ctg}^2 x - 4\operatorname{ctg} x + 5.$

7. Контрольные вопросы
   1. Основные свойства и график функции y = tg x.
   2. Функция y = ctg x, ее свойства и график.

Практическое занятие №16
1. Наименование работы Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*

3. Цель практической работы: Повторить и закрепить знания о последовательностях, их свойствах и структуре

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

__Задание 1.__ Какие из данных последовательностей являются геометрическими прогрессиями?

1) 2; 4; 8; 16; …
2) –8; –8; –8; –8; …
3) 6; –6; 6; –6; …
4) 7; 11; 15; 19; …
5) –3,2; –2,5; –1,8; –1,1; …
6) 2; 2,3; 2,34; 2,345; …

__Задание 2.__ Дана геометрическая прогрессия $b_n = 2(-3)^n$

1. Найдите пятый член прогрессии.
2. Найдите сумму первых восьми членов прогрессии.

__Задание 3.__ Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии $8; 2; \frac{1}{2}; \ldots$

__Задание 4.__ В геометрической прогрессии (b_n) известно, что $b_1 = 2, q = -2$. Найти пятый член этой прогрессии.

__Задание 5.__ Геометрическая прогрессия (b_n) задана формулой n - го члена. Укажите десятый член этой прогрессии. Найдите сумму первых трех членов этой прогрессии

7. Контрольные вопросы

Повторить основные формулы арифметической и геометрической прогрессии

Практическое занятие №17

1. Наименование работы Нахождение производных функции.

2. Продолжительность проведения – *3 часа*

3. Цель практической работы: показать умение находить производную функции, используя таблицу производных элементарных функций и правила нахождения производных

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

1) <u>Базовый уровень сложности задания</u>

Найдите производную функции:

а) $y = (4-3x)^5$ y' =
б) $y = e^x + 6x^2$ y' =
в) $y = \ln x + 3\sin x - x^{\frac{2}{3}}$
y' =
г) $y = \cos^2 x$ y' =
д) $y = x^6 \ln x$ y' =

2) <u>Повышенный уровень сложности задания</u>

а) $y = 3e^{2x} - \sqrt{x}$ y' =

б) y = $\sin^4 x+\cos 5x+2x^3$ y'=

в) y = $\dfrac{x^2-1}{2x+1}$ y' =

г) y = $\dfrac{\sin x+\cos x}{e^x}$ y' =

д) y = $e^{2\cos 5x}$ y' =

7. Контрольные вопросы

Сформулировать геометрический смысл производной

Практическое занятие №18

1. Наименование работы Производная сложной функции.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Корректировать знания, умения и навыки в теме: «Вычисление производных сложных функций». Закрепить и систематизировать знания по теме.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение тетрадь для практических работ, ручка, раздаточный материал, рабочая тетрадь с теоретическим материалом, микрокалькулятор.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Задание 1 $y=3x^4+4^x-\dfrac{1}{x}+arcctgx$

Задание 2 $y=\left(2x^3-3x^2\right)ctg4x$

Задание 3 $f(x)=\dfrac{x+6}{2x^2+9x-18}$

Задание 4 $y=\sqrt{\dfrac{\cos 4x+x^2}{4x}}$

Задание 5 $y=\sqrt{2tg^3 2x}$

Задание 6 $y=x^{\cos x}$

7. Контрольные вопросы

1 Что называется производной функции?

2 Сформулируйте правила дифференцирования.

3 Что такое сложная функция?

4 Как найти производную сложной функции?

5 В каких случаях используется метод логарифмического дифференцирования?

6 В чем суть метода логарифмического дифференцирования?

Практическое занятие №19

1. Наименование работы Исследование функций с помощью производной.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: показать умение находить производную функции, используя таблицу производных элементарных функций и правила нахождения производных
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (с. 10-40)
6. Задание.

*1 вар*иант.

1. Областью определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{6-x-x^2}}$ является:

   а) $(-3;2)$; б) $(-\infty;-3)$; в) $(2;+\infty)$; г) $[-3;2]$.

2. Область значений функции $y=3\sin x+4\cos x$ является:

   а) $[-7;7]$; б) $[1;7]$; в) $[3;4]$; г) $[-5;5]$.

3. Функция $y=9x+3x^2-x^3$ возрастает на промежутке:

   а) $[3;+\infty)$; б) $[-1;3]$; в) $[-1;+\infty)$; г) $(-\infty;-1]$.

4. Критическими (стационарными) точками функции $y=\cos x+x$ являются:

   а) $\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$; б) $\dfrac{\pi}{2}(4n-1)$; в) πn; г) $\dfrac{\pi}{2}n$, $n\in Z$.

*2 вар*иант.

1. Областью определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ является:

   а) $(3;+\infty)$; б) $(-1;3)$; в) $[1;3]$; г) $(-1;+\infty)$.

2. Область значений функции $y=5\sin x-12\cos x$ является:

   а) $[-13;13]$; б) $[-17;17]$; в) $[-7;17]$; г) $[5;12]$.

3. Функция $y=x^3+1{,}5x^2-18x$ убывает на промежутке:

   а) $(-\infty;3]$; б) $[2;+\infty)$; в) $[-3;2]$; г) $[-3;+\infty)$.

4. Критическими (стационарными) точками функции $y=x-\sin x$ являются:

   а) πn; б) $2\pi n$; в) $\dfrac{\pi}{2}(4n+1)$; г) $\dfrac{\pi}{2}(4n-1)$, $n\in Z$.

7. Контрольные вопросы

1 Что называется производной функции?

2 Сформулируйте правила дифференцирования.

3 Что такое сложная функция?

4 Как найти производную сложной функции?

5 В каких случаях используется метод логарифмического дифференцирования?

6 В чем суть метода логарифмического дифференцирования?

Практическое занятие №20

1. Наименование работы Применение производной для отыскания наибольших и наименьших значений величин.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: показать умение находить производную функции, используя таблицу производных элементарных функций и правила нахождения производных
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

*1 вар*иант.

1. На отрезке $[-1;3]$ функция $y=\frac{1}{3}x^3-4x+5$ достигает наибольшего значения в точке с абсциссой:
   а) –1; б) –2; в) 3; г) 0.
2. Наименьшее значение функции $y=2x^3+\frac{1}{2}x^2-x$ на интервале $(0;1)$ равно:
   а) $-\frac{4}{27}$; б) 2; в) $-\frac{11}{54}$; г) 2.
3. Положительное число, сумма которого со своей обратной величиной имеет наименьшее значение, равно:
   а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}$.
4. Стороны прямоугольника наибольшей площади при его периметре 12 м равны:
   а) 2 и 4 м; б) 3 и 3 м; в) 1 и 5 м; г) 1,5 и 4,5 м.

*2 вар*иант.

1. На отрезке $[-1;4]$ функция $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-6x$ достигает наименьшего значения в точке с абсциссой:
   а) –1; б) 3; в) 4; г) 0.
2. Наибольшее значение функции $y=2x^3+\frac{1}{2}x^2-x$ на интервале $(-1;0)$ равно:
   а) $\frac{5}{8}$; б) $\frac{1}{2}$; в) –2; г) $\frac{3}{8}$.
3. Число, куб которого превышает утроенный его квадрат на минимальное значение, равно:
   а) 1; б) 2; в) $\frac{1}{3}$; г) –1.
4. Стороны прямоугольника наименьшего периметра при его площади 114 м^2 равны:
   а) 4 и 36 м; б) 8 и 18 м; в) 12 и 12 м; г) 9 и 16 м.

7. Контрольные вопросы
где применяется на практике отыскание производной

Практическое занятие №21

1. Наименование работы Применение определенного интеграла для нахождения площади криволинейной трапеции.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: показать умение находить интеграл функции, используя таблицу интегралов элементарных функций и правила их нахождения.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Вариант 1.

1. Вычислите интегралы: а) $\int_{-1}^{2} x^2 dx$; б) $\int_{0}^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^1 (2x+1)dx = \int\limits_0^2 (x^3 - 1)dx$.

Вариант 2.

1. Вычислите интегралы: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin x dx$; б) $\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$.

2. Докажите справедливость равенства: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{3}} x^2 dx$.

7. Контрольные вопросы

Какими формулами пользовались при решении примеров

Практическое занятие №22

1. Наименование работы Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

2. Продолжительность проведения – *2 часа*

3. Цель практической работы: показать умение находить интеграл функции, используя таблицу интегралов элементарных функций и правила их нахождения.

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Вариант 1.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = (x-2)^2$, $y = 4 - x^2$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x-1},\ y = 2,\ y = 0,\ x = 0$, равна:

   а) $4\frac{2}{3}$; б) 4; в) $3\frac{1}{3}$.

Вариант 2.

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 4x - x^2$.
2. *Выберите правильный вариант ответа*. Площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+1},\ y = 2,\ y = 0,\ x = -2$, равна:

   а) $4\frac{1}{3}$; б) $3\frac{2}{3}$; в) $4\frac{2}{3}$.

7. Контрольные вопросы

Какими формулами пользовались при решении примеров

Практическое занятие №23

1. Наименование работы Иррациональные и Показательные уравнения. Способы решения.

2. Продолжительность проведения – *2 часа*

3. Цель практической работы: Закрепить знания в применении формул для решения уравнений

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.
Вариант 1.
Решите уравнения:
а) $\sqrt{2x+12}=2x+10$; б) $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$; в) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}=\sqrt{7x+4}$.
Вариант 2.
Решите уравнения:
а) $2\sqrt{x+5}=x+2$; б) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$; в) $\sqrt{18-\sqrt[3]{x+10}}=4$.
7. Контрольные вопросы
Какими формулами пользовались при решении примеров

Практическое занятие №24
1. Наименование работы Рациональные и Иррациональные неравенства. Способы решения.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Закрепить знания в применении формул для решения неравенств
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Вариант 1
1. Решите неравенства:
а) $(4-x)^2-(x+6)^2\ge(x+5)^2-(2-x)^2$;
б) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{2x}{3}>\dfrac{3x-10}{4}$;
в) $(x+2)^2(x-3)(x+6)<0$.
2. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases}5(x+1)-9x-3>-6(x+2),\\ 3(3+2x)<7x-2(x-8).\end{cases}$$

Вариант 2
1. Решите неравенства:
а) $5(x-1)-x(7-x)<x^2$;
б) $\dfrac{x^2}{10}+2>\dfrac{7x}{10}$;
в) $(x+8)^2(10-x)^3>0$.
2. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases}\dfrac{x-9}{4}-x<\dfrac{x-1}{2}-\dfrac{x-2}{3},\\ 2-x>2x-8.\end{cases}$$

7. Контрольные вопросы
какими формулами пользовались при решении примеров

Практическое занятие №25
1. Наименование работы Показательные неравенства. Способы решения.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Закрепить знания в применении формул для решения неравенств
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Вариант 1.

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = 2^x, y = 2^x - 1$ и $y = 2^{x+2} - 1$.
2. Решите уравнение: а) $8^{-1} \cdot 2^{3x} = 8$; б) $5^x - 7 \cdot 5^{x-2} = 90$; в) $9^x + 3^{x+1} = 18$.
3. Решите неравенство: а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x \geq 27$; б) $4^x + 16 > 10 \cdot 2^x$.

Вариант 2.

1. Постройте в одной координатной плоскости графики функций $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$.
2. Решите уравнение: а) $27^{-1} \cdot 3^{3x} = 27$; б) $4^x - 3 \cdot 4^{x-2} = 52$; в) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$.
3. Решите неравенство: а) $0{,}5^x \leq 2\sqrt{2}$; б) $9^x + 3 \cdot 3^x > 18$.

7. Контрольные вопросы
Повторить алгоритм решения неравенства

Практическое занятие №26

1. Наименование работы Тригонометрические неравенства. Способы решения.
2. Продолжительность проведения – *3 часа*
3. Цель практической работы: Закрепить знания в применении формул для решения уравнений и неравенств
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

1. Решите уравнение:

а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$;

б) $tg\alpha = \sqrt{3}$.

2.Решите уравнение:

а) $ctg\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

б) $\sin 2x = -\frac{1}{2}$.

3.Решите уравнение:

$\cos^2\alpha + 2\cos\alpha = 3$.

4.Решите неравенство:

$\sin x + 1 \leq 5\sin x - 1$

5.Решите уравнение:

а) $\sin^2 x - 3\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$;

б) $tg\ (\pi + x) - 2ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \sqrt{3} = 0$.

6.Решите уравнение:

$\frac{1}{\cos^2 x} + ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = tg^2 x + \frac{\cos 2x}{\cos^2 x}$.

7. Контрольные вопросы
Повторить основные формулы тригонометрии

Практическое занятие №27

1. Наименование работы Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*

3. Цель практической работы: в результате освоения темы студент должен уметь решать задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Задание 1.

Найти число размещения:

1) из 10 элементов по 4;
2) из n+4 элементов по n-2.

Задание 2.

Решить уравнение $A_n^5 = A_{(n-1)}^4$.

Задание 3.

Составить все возможные перестановки из элементов:

1) 2;
2) 4,5;
3) a,b, c,d.

Задание 4.

Вычислить значения выражений:

1) 5! +6!;
2) 52!/50!;
3) C_{15}^{13};
4) $C_6^4 + C_5^0$.

Задание 5.

Из басни Крылова «Квартет» решите задачу. «Проказница Мартышка, Осел, Козел и Косолапый Мишка затеяли сыграть квартет». Мишке выбирал 4 любых инструмента из имеющихся 11.

а) Найдите число всевозможных выборов инструментов.

б) Найдите число всевозможных рассаживаний участников квартета с выбранными четырьмя инструментами (инструменты, как в басне Крылова, занимают четко отведенные позиции).

в) Сколько всего различных инструментальных составов квартета может получиться?

7. Контрольные вопросы
Повторить формулы комбинаторики

Практическое занятие №28

1. Наименование работы Решение практических задач с применением вероятностных методов.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: в результате освоения темы студент должен уметь решать задачи, применяя основные формулы теории вероятности.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Задача 1

В чемпионате по гимнастике участвуют 20 спортсменок: 8 из России, 7 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Задача 2

В среднем из 1000 садовых насосов, поступивших в продажу, 5 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Задача 3

Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых.

Задача 4

Научная конференция проводится в 5 дней. Всего запланировано 75 докладов — первые три дня по 17 докладов, остальные распределены поровну между четвертым и пятым днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Задача 5

Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,97. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,89. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Задача 6

Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

7. Контрольные вопросы

Что значит сложение, умножение вероятностей, как и где применить это в быту

Практическое занятие №29

1. Наименование работы Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: применить умения и навыки применения изученных теоретических фактов в ходе решения задач
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Вариант 1

на «3»:

1) Найдите длину отрезка, если его проекция на плоскость равна 9 см, а концы отрезка находятся на расстоянии 96,5 см и 56,5 см от плоскости по одну сторону от неё.

на «4»:

2) Двугранный угол равен 45°. На одной грани двугранного угла дана точка B, расстояние от которой до ребра равно 26 см. Чему равно расстояние от точки B до второй грани двугранного угла?

на «5»:

3) В двугранном угле, грани которого перпендикулярны, дана точка A. Расстояния от точки до граней AB=14 см и AC=48 см. Рассчитайте расстояние AD до общей прямой, граней этого угла.

Вариант 2

на «3»:

1) Концы отрезка длиной 17 см находятся на расстоянии 42,5см и 27,5см от плоскости по одну сторону от неё. Найдите длину проекции данного отрезка на эту плоскость.

на «4»:

2) Двугранный угол равен 60°. На одной грани двугранного угла дана точка В, расстояние от которой до ребра равно 20 см. Чему равно расстояние от точки В до второй грани двугранного угла?
на «5»:
3) На одной из граней двугранного угла даны точки А и В, расстояния которых до ребра этого угла соответственно 15 см и 30 см. Расстояние от точки А до второй грани угла 9 см. Рассчитайте расстояние от точки В до второй грани угла.
7. Контрольные вопросы
Повторить основные определения, теоремы и следствия

Практическое занятие №30
1. Наименование работы Признак параллельности двух плоскостей.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: применить умения и навыки применения изученных теоретических фактов в ходе решения задач
3. Цель практической работы: в результате освоения темы студент должен уметь решать задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.
Вариант 1
№ 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки E и F – середины ребер AA_1 и CC_1 соответственно. Определите число сторон сечения плоскостью, которая определяется точками B, E и F.
№ 2. $MCDN$ – ромб, длина стороны которого 4 см; $MNKP$ – параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $CDKP$, если NK = 8 см и $\angle CMP = 60^0$.
№ 3. В треугольной пирамиде $MABC$ все ребра равны 6 см. Найдите периметр сечения, проведенного параллельно стороне BC и проходящего через точки A и K, где K – середина BM.
Вариант 2
№ 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, E – середина CC_1. Определите число сторон сечения плоскостью, которая проходит через точки A, B_1 и E.
№ 2. $CDEK$ – ромб, сторона которого равна 8 см; $CKMN$ – параллелограмм. Найдите периметр четырехугольника $DEMN$, если KM = 6 см и $\angle DCN = 60^0$.
№ 3. В треугольной пирамиде $SMEF$ все ребра равны 4 см. Найдите периметр сечения, проведенного параллельно ребру MF и проходящего через точки E и P, где P – середина SF.
7. Контрольные вопросы
Повторить определения, теоремы и следствия по данной теме

Практическое занятие №31
1. Наименование работы Перпендикуляр и наклонная. Угол между прямой и плоскостью.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*

3. Цель практической работы: применить умения и навыки применения изученных теоретических фактов в ходе решения задач

3. Цель практической работы: в результате освоения темы студент должен уметь решать задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Вариант 1

№ 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. K – середина AD, M – середина CD. В каком отношении, считая от точки A, делит ребро AA_1 плоскость, проходящая через точки B_1, K и M?

№ 2. KO – перпендикуляр к плоскости α, KM и KP – наклонные к плоскости α, OM и OP – проекции наклонных, причем сумма их длин равна 15 см. Найдите расстояние от точки K до плоскости α, если KM = 15 см и $KP = 10\sqrt{3}$ см.

№ 3. Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle C = 90^0$, AC = 8 см, BC = 6 см. Отрезок CD – перпендикуляр к плоскости ABC. Найдите CD, если расстояние от точки D до стороны AB равно 5 см.

Вариант 2

№ 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E – середина CD, F делит ребро AD в отношении $1 : 3$, считая от точки D. В каком отношении делит ребро AA_1 (считая от точки A) плоскость, проходящая через точки B_1, E и F?

№ 2. BO – перпендикуляр к плоскости α, BA и BC – наклонные, OA и OC – их проекции на плоскость α, причем сумма их длин равна 24 см. Найдите расстояние от точки B до плоскости α, если $AB = 4\sqrt{6}$ см и $BC = 12\sqrt{2}$ см.

№ 3. Треугольник ABC – прямоугольный, $\angle A = 60^0$, $\angle C = 90^0$. CH – высота треугольника ABC, причем CH = 8 см. Отрезок BK перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. Найдите отрезок BK, если расстояние от точки K до стороны AC равно 20 см.

7. Контрольные вопросы

Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №32

1. Наименование работы Признак перпендикулярности двух плоскостей.

2. Продолжительность проведения – *2 часа*

3. Цель практической работы: применить умения и навыки применения изученных теоретических фактов в ходе решения задач

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Задача 1. Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости α, а катет наклонён к этой плоскости под углом 30°. Найдите угол между плоскостью α и плоскостью треугольника.

Задача 2. Ребро CD тетраэдра $ABCD$ перпендикулярно к плоскости ABC, $AB=BC=AC=6$, $BD=3\sqrt{7}$. Найдите двугранные углы $DACB$, $DABC$, $BDCA$.

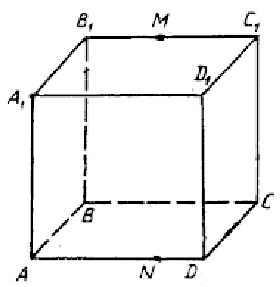
Задача 3. Найдите двугранный угол $ABCD$ тетраэдра $ABCD$, если углы DAB, DAC и ACB прямые, $AC=CB=5$, $DB=5\sqrt{5}$.

7. Контрольные вопросы

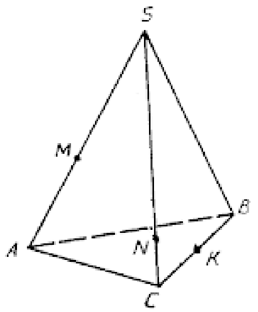
Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №33

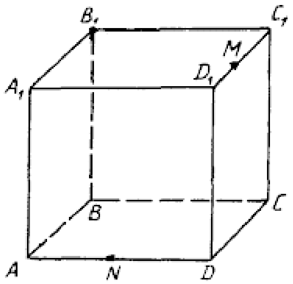
1. Наименование работы Задачи на построение сечений.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Обеспечить повторение, обобщение и систематизацию материала темы «Многогранники»; сформировать умение применять математические знания к решению практических задач;
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.



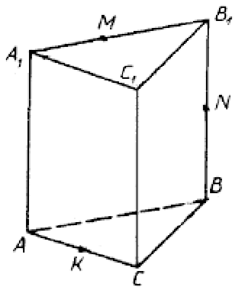
1



2



3



4

Задача 1. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: A_1; $M \in B_1C_1$; $N \in AD$.

Задача 2. Построить сечение тетраэдра SABC плоскостью, проходящей через точки: $M \in SA$; $N \in SC$; $K \in BC$.

Задача 3. Построить сечение куба плоскостью, проходящей через точки: $M \in C_1D_1$; B_1 и $N \in AD$.

Задача 4. Построить сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки: $M \in A_1B_1$; $N \in BB_1$ и $K \in AC$.

7. Контрольные вопросы

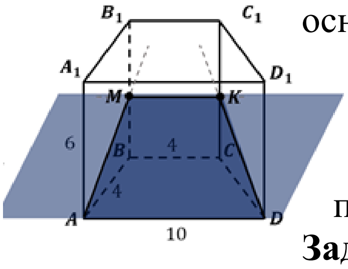
Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №34

1. Наименование работы Сечение куба и призмы.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Обеспечить повторение, обобщение и систематизацию материала темы «Многогранники»; сформировать умение применять математические знания к решению практических задач;
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

6. Задание.

Задача 1. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция с



основаниями, равными 10 см и 4 см, и боковой стороной, равной 4 см. Боковое ребро призмы равно 6 см. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через большую сторону основания и середину противоположного бокового ребра призмы.

Задача 2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение куба плоскостью, которая проходит через данные точки: а) C_1, К, D; б) C_1, К, С, где точка К – середина A_1B_1. Определите, какая фигура образуется в сечении.

Задача 3. Точка Х делит ребро АВ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в отношении АХ : ХВ = 2 : 3. Постройте сечение этого куба плоскостью, которая параллельна плоскости AA_1C_1 и проходит через точку Х. Найдите периметр сечения, если АВ = а.

7. Контрольные вопросы

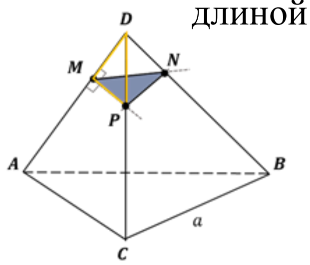
Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №35

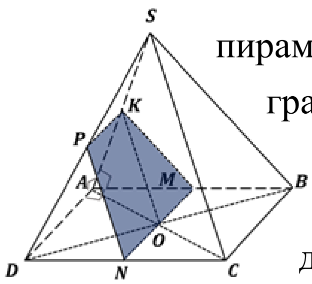
1. Наименование работы Сечение пирамиды.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Обеспечить повторение, обобщение и систематизацию материала темы «Многогранники»; сформировать умение применять математические знания к решению практических задач;
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Задача первая В треугольной пирамиде SABC провести сечение:
а) через середину ребра АС параллельно грани SCB;
б) через середину ребра SC параллельно грани SAB.

Задача вторая. На ребре AD правильного тетраэдра $DABC$ с длиной ребра a взята точка M такая, что $MA : MD = 3 : 1$. Найдите площадь сечения тетраэдра плоскостью, содержащей точку M и перпендикулярной ребру AD.



Задача третья. В основании четырёхугольной



пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а две боковые грани SAB и SAD представляют собой прямоугольные треугольники с прямым $\angle A$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, содержащей точку пересечения диагоналей основания и параллельной грани SBC, если $SA = AB = a$.

7. Контрольные вопросы

Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №36

1. Наименование работы Элементы симметрии правильных многогранников. Развёртка.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Обеспечить повторение, обобщение и систематизацию материала темы «Многогранники»; сформировать умение применять математические знания к решению практических задач;
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Тест по теме «Многогранники».

1. Сколько рёбер у шестиугольной призмы?
а) 18; б) 6; в) 24; г) 12; д) 15.
2. Какое наименьшее число граней может иметь призма?
а) 3; б) 4; в) 5; г) 6; д) 9.
3. Выберите верное утверждение:
а) у n-угольной призмы 2n граней;
б) призма называется правильной, если её основания - правильные многоугольники;
в) у треугольной призмы нет диагоналей;
г) высота призмы равна её боковому ребру;
д) площадью боковой поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней.
4. Дан тетраэдр ABCD, у которого противоположными рёбрами являются:

а) AC и DC; б) AC и DB; в) AB и DA; г) AC и BC; д) AC и DA.
5. Какое из следующих утверждений верно?
а) параллелепипед состоит из шести треугольников;
б) противоположные грани параллелепипеда имеют общую точку;
в) диагонали параллелепипеда пересекаются в отношении 2:1, начиная от вершины нижнего основания;
г) две грани параллелепипеда, не имеющие общего ребра, называются смежными;
д) существуют тетраэдр и параллелепипед, у которых одинаковая площадь полной поверхности.
6. Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д$. Каково расположение прямых $В_1Д_1$ и АС ?
а) пересекаются ; б) параллельны; в) скрещиваются.
7.Три ребра параллелепипеда равны 3 м, 4 м и 5 м. Найдите сумму длин всех эго рёбер.
а) 12 м; б) 18 м; в) 24 м; г) 48 м; д) 36 м.
8.Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, K, - середины соответственно рёбер AA_1, B_1C_1 и CD. Сечение куба плоскостью MNK представляет собой:
а) треугольник; б) четырёхугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник;

д) семиугольник.

9. Измерениями прямоугольного параллелепипеда называются:

а) длины трёх произвольно взятых диагоналей;

б) длины трёх равных рёбер параллелепипеда;

в) длины трёх рёбер, имеющих общую вершину;

г) длины диагоналей основания параллелепипеда;

д) длины смежных сторон и диагонали параллелепипеда.

10. Какое из перечисленных геометрических тел не является правильным многогранником?

а) правильный тетраэдр; б) правильный гексаэдр; в) правильная призма;

г) правильный додекаэдр; д) правильный октаэдр.

7. Контрольные вопросы

Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №37

1. Наименование работы Сфера и шар. Сечения.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: Обеспечить повторение, обобщение и систематизацию материала темы «Многогранники»; сформировать умение применять математические знания к решению практических задач;
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

Вариант 1

1) Радиус шара равен 17 см. Найдите площадь сечения шара, удаленного от его центра на 15 см.

2) В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объем этого шара

3) Объем шара равен 972 π см³. Найдите площадь его поверхности.

Вариант 2

1) Диаметр шара равен 8см. Через конец диаметра проведена плоскость под углом 45º к нему. Найдите длину линии пересечения сферы этой плоскостью.

2) Радиусы двух шаров равны 6 и 8. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей их поверхностей.

3) Объем шара равен 288Пи. Найдите площадь его поверхности

7. Контрольные вопросы

Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №38

1. Наименование работы Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы:

проверка знаний по достижению целостного представления о векторах и областях их применения;
по обобщению знаний по теме «Векторы в пространстве»
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.

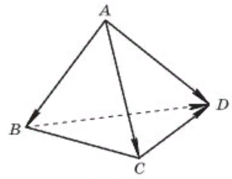


Рис. 1

Задача 1 а). Дан тетраэдр $ABCD$. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$. (рис.1).

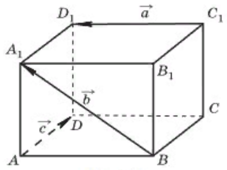


Рис. 2

Задача 2. Нарисуйте параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и обозначьте векторы $\overrightarrow{C_1D_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AD}$ соответственно через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Изобразите на рисунке векторы:

а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{c}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $\vec{c}-\vec{b}$; д) $\vec{c}-\vec{a}$ (рис. 2).

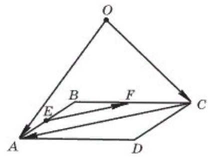


Рис. 3

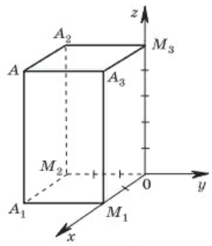
Задача 3 Точки E и F — середины сторон AB и BC параллелограмма $ABCD$, а O — произвольная точка пространства. Выразите вектор $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$ через вектор $\overrightarrow{EF}$. (рис. 3)

Задача 4 Упростите выражение $2(\vec{m}+\vec{n})-3(4\vec{m}-\vec{n})+\vec{m}$.

7. Контрольные вопросы
Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №39

1. Наименование работы Простейшие задачи в координатах. Формула расстояния между двумя точками.
2. Продолжительность проведения – *2 часа*
3. Цель практической работы: проверка знаний
по достижению целостного представления о векторах и областях их применения
4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.
5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).
6. Задание.



Задача 1 Дана точка $A(2;\ -3;\ 5)$. Найдите координаты проекций этой точки на координатные плоскости.

Задача 2

Дано: $\vec{a}\{-1;\ 2;\ 0\}$, $\vec{b}\{0;\ -5;\ -2\}$, $\vec{c}\{2;\ 1;\ -3\}$. Найдите координаты вектора $\vec{p}=3\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}$.

Задача 3. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;\ -1;\ 3)$, $B(2;\ -2;\ 4)$.

Задача 4. Даны векторы $\vec{b}\{3;\ 1;\ -2\}$ и $\vec{c}\{1;\ 4;\ -3\}$. Найдите $|2\vec{b}-\vec{c}|$.

Задача 5. Изобразите систему координат $Oxyz$ и постройте точку $A(1;\ -2;\ -4)$. Найдите расстояния от этой точки до координатных плоскостей.

7. Контрольные вопросы
Повторить основные определения, теоремы и следствия из них

Практическое занятие №40

1. Наименование работы Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

2. Продолжительность проведения – 3 *часа*

3. Цель практической работы: проверить знания о координатах и векторах при решении прикладных задач в физике и геометрии; проверить интерес учащихся к изучению математики и физики

4. Материалы, оборудование, программное обеспечение инструкционно-технологические карты, микрокалькуляторы.

5. Краткие теоретические сведения. (см. выше с. 10-40).

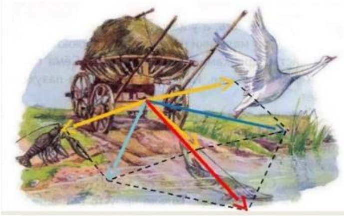
6. Задание.

Задача №1 . А правда ль воз и ныне ТАМ???

Дано: Да *Лебедь рвется в облака, Рак пятится назад,*

а ***Щука тянет в воду.*** Кто виноват из них, кто прав - судить не нам;

Да только воз и ныне там.



Задача № 2. Говорят, что колеса поездов вращаются не равномерно, т.е. есть точки на колесах которые перемещаются не вперед, а назад?

Задача №3. Вычислить работу, совершаемую силой F=(1;2;3), при прямолинейном перемещении материальной точки из положения B(1;0;0) в положение C(10:1:2).

Задача№4. Даны вершины треугольника A(0;2;0), B(-2;5;0), C(-2;2;6). Найти его площадь.

Задача № 5. Вычислить площадь параллелограмма, три вершины которого A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6) заданы своими координатами в прямоугольной системе

Дифференцированное задание (дополнительно)

Задание на «3». Какую работу совершает сила F>(3;2;1), если груз был доставлен из пункта A(5;-2;0) в пункт B(7;2;-4)?

2.Задание на «4». Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{c}(4;-2;1), \bar{d}(8;-4;4)$

3. Задание на «5». На векторах $\overline{AB}$, $\bar{a}$ построен параллелограмм. Вычислите его площадь если его вершины $A(2;-1;1), B(1;-1;5), \bar{a}(-2;1;0)$

7. Контрольные вопросы

1.Что называют вектором?

2.Какие вектора являются коллинеарными?

3.Нулевой вектор-это какой?

4.Можно ли умножить вектор на число? Как?

5.Что такое скалярное произведение векторов?

6.Что называют модулем вектора?

7.Какие вектора являются ортогональными?

8.Как найти координаты середины отрезка по координатам его концов?

9.Имеет ли физический смысл скалярное произведение векторов? Какой?

10.Чем задается плоскость и пространство?

5.Перечень рекомендуемых источников
(в том числе Интернет-ресурсы)

Основные источники:

1. Атанасян Л.С. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. Организаций : базовый и углубленный уровни / Л.С. Атанасян и др. – 4-е изд. – М. : Просвещение, 2017. – 255 с.
2. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11кл. : учеб. для ОУ (базовый уровень) в 2-х ч. Ч.1 /А.Г. Мордкович.- 12-е изд., доп.- М.: Мнемозина, 2013.- 400 с.
3. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11кл. : учеб. для ОУ (базовый уровень) в 2-х ч. Ч.2: задачник / А.Г. Мордкович и др.; под ред. А.Г. Мордковича.- 12-е изд., испр. и доп.- М.: Мнемозина, 2013.- 271с.

Дополнительные источники:

4. Богомолов Н.В. Практические занятия по математике. М.: Юрайт, 2013.
5. Богомолов Н.В. Математика: учебник. М.: Юрайт, 2013
6. Конте А.С. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 класс. Диктанты /А.С. Конте - Волгоград: Учитель, 2015.- 65 с.
7. Милованов Н.Ю. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы. Задания на готовых чертежах / Н.Ю. Милованов. - Волгоград: Учитель, 2016. – 153 с.
8. Панишева О.В. Математика в стихах. 5-11 класс. Задачи, сказки, рифмованные правила / О.В. Панишева.- Волгоград: Учитель, 2014. – 212 с.

Интернет-ресурсы:

9. Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://school-collection.edu.ru
10. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://window.edu.ru/window/library
11. Федеральный институт педагогических измерений [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.fipi.ru
12. Федеральный центр информационно-образовательных ресурсов. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://fcior.edu.ru
13. Полный курс для подготовки к ЕГЭ по математике ege-study.ru