Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение «Кунгурский автотранспортный колледж»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

по учебной дисциплине

ЕН.02 Дискретная математика с элементами математической логики

по специальности

09.02.07 Информационные системы и программирование

2020

Одобрено на заседании
цикловой комиссии
информационно-математических дисциплин.
Протокол №____ от «__» _____20___г.
Председатель комиссии
_____И.Г. Наговицын

УТВЕРЖДАЮ
Зам. директора
_____М.Г. Целищева
«___» _____ 20___г.

Организация-разработчик: ГБПОК КАТК

Составитель: И.Г. Наговицын

СОДЕРЖАНИЕ

1	Пояснительная записка	4
2	Перечень практических занятий	5
3	Требования к оформлению практических работ	5
4	Практическое занятие 1	7
5	Практическое занятие 2	10
6	Практическое занятие 3	12
7	Практическое занятие 4	16
8	Практическое занятие 5	17
9	Практическое занятие 6	19
10	Практическое занятие 7	20
11	Практическое занятие 8	24
12	Практическое занятие 9	26
13	Практическое занятие 10	29
34	Список информационных источников	32

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Методические рекомендации по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.02 «Дискретная математика с элементами математической логики» составлены в соответствии с требованиями ФГОС СПО к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников СПО по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и на основе рабочей программы дисциплины. Данная дисциплина относится к блоку *естественнонаучных* дисциплин, устанавливающих базовые знания для освоенияспециальных и общепрофессиональных дисциплин.

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение обучающимися по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических занятий - формирование у обучающихся практических умений, необходимых для изучения специальных учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

В ходе практических занятий обучающиеся овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по дискретной математике:

1) расширение и закрепление теоретических знаний по дискретной математике, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у обучающихся практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач по дисциплине;

3) развитие у обучающихся потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения дискретной математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения дискретной математики;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

ПЕРЕЧЕНЬ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Тема 1. Основы теории множеств

Практическое занятие №1 «Способы задания множеств».

Практическое занятие №2 «Множества точек на плоскости».

Практическое занятие №3 «Функции. Область определения и множество значений функции».

Тема 2.Комбинаторика

Практическое занятие №4 «Решение комбинаторных задач».

Практическое занятие №5 «Размещения. Перестановки. Сочетания».

Тема 3.Основы математической логики

Практическое занятие №6 «Логические операции над высказываниями».

Практическое занятие №7 «Равносильные преобразования».

Практическое занятие №8 «Разложение булевых функций по переменным. СКНФ и СДНФ».

Практическое занятие №9 «Многочлен Жегалкина».

Тема 4. Основы теории графов

Практическое занятие №10 «Способы задания графа».

Требования к оформлению практическихработ

Студент должен выполнить практическую работу в соответствии с полученным заданием. Каждый студент после выполнения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.

Отчет о проделанной работе следует выполнять на отдельных листах в клетку формата А4, которые хранятся в отдельных папках. Содержание отчета указано в описании практической работы.

Если студент не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.

Оценку по практической работе студент получает, с учетом срока выполнения работы, если:

— работа выполнена правильно и в полномобъеме;

— сделан анализ проделанной работы и вывод по результатамработы;

— студент может пояснить выполнение любого этапаработы;

— отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнениюработы.

Зачет по практическим работам студент получает при условии выполнения всех предусмотренных программой работ, после сдачи отчетов по работам при получении удовлетворительных отметок.

Критерии оценки

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но обучающийся обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что обучающийся не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии обучающегося; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные обучающемуся дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практическое занятие №1

Тема:*«Способы задания множеств»*

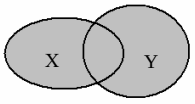
Цель работы:Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории множеств».

Краткие теоретические сведения

Объединением (суммой) множеств X и Y ($X \bigcup Y = X + Y$) называется множество, состоящее из всех этих элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X и Y.

Рис.1. Объединение множеств

Пересечением (произведением) множеств X и Y ($X \bigcap Y = X \cdot Y$) называется множество, состоящее



элементов, которые принадлежат множествам X и Y.

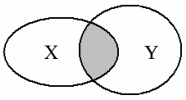


Рис.2. Пересечение множеств

*Разностью множеств*X и Y ($X \setminus Y = X - Y$) называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат множеству X и не принадлежат множеству Y. Очевидно, что X \ Y≠ Y \ X.

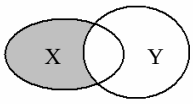


Рис.3. Разность множеств X и Y

Симметричной разностью множеств X и Y ($X \oplus Y = (X \setminus Y) \bigcup (Y \setminus X)$) называется множество, являющейся объединением разностей X\Y и Y\X.

Пример 1.

X – множество отличников в группе.

Y – множество студентов, живущих в общежитииX

$X \bigcup Y$ – множество студентов, которые учатся на отлично или живут в общежитии.

$X \bigcap$ Y – множество отличников, которые живут в общежитии.

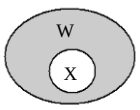
X\Y – множество отличников, которые не живут в общежитии.

Y\X – множество студентов, живущих в общежитии и не учащихся на отлично.

$X \oplus$ Y – множество отличников, не живущих в общежитии и множество неотличников, живущих в общежитии.

Дополнительным к множеству X по отношению к множеству W, если $X \subset W$, называется множество, состоящее из элементов множества W, не принадлежащих множеству X.

Рис.4. Дополнительное множество



Универсальным множеством I называется множество, для которого справедливо соотношение $X \bigcap I = X$. Множество I содержит все элементы множества X. Следовательно, любое множество X полностью содержится во множестве I, т. е. является его подмножеством $X \subset I$. Для предыдущего примера I – это множество студентов.

Дополнением множества X (до универсального множества I) называется множество $\overline{X}$, определяемое из соотношения $\overline{X} = I \setminus X$.

Очевидно, что $X \bigcap \overline{X} = 0$, $X \bigcup \overline{X} = I$, $\overline{\overline{X}} = X$

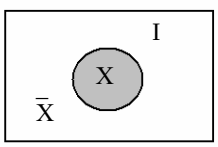


Рис.5. Множество X и его дополнение $\bar{X}$

Декартово произведением множеств $X \times Y$ двухмножествX и Y называют множество всех упорядоченных пар (x,y) таких, что $x \in X$, $y \in Y$.

Пример 2.

Пусть: X = {1,2}, Y = {-1,0,1} .

X × Y = (1,-1), (1,0), (1,1), (2,-1), (2,0), (2,1) ,

Y × X = (-1,1), (-1,2), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2) .

Пример 3.

Пусть X = {x_1, x_2, x_3, x_4} и Y = {y_1, y_2, y_3}.

Декартово произведение X × Y удобно представить в виде таблицы (матрицы).

X \ Y	y_1	y_2	y_3
x_1	(x_1, y_1)	(x_1, y_2)	(x_1, y_3)
x_2	(x_2, y_1)	(x_2, y_2)	(x_2, y_3)
x_3	(x_3, y_1)	(x_3, y_2)	(x_3, y_3)
x_4	(x_4, y_1)	(x_4, y_2)	(x_4, y_3)

На множестве X задано *бинарное отношение*R, если задано подмножество декартова произведения X×X (т. е. R⊂X×X).

Пример 4.

Пусть X = {1, 2, 3, 4}. Зададим на X следующие отношения:

T = {(x, y) | x, y ∈ X; x = y} – отношение равенства;

P = {(x, y) | x, y ∈ X; x = y - 1} – отношение предшествования;

Q = {(x, y) | x, y ∈ X; x делится на y} – отношение делимости.

Все эти отношения заданы с помощью характеристического свойства. Перечислим элементы этих отношений для заданного множества X = {1,2,3,4}:

T = {(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)};

P = {(1,2), (2,3), (3,4) };

Q = {(4,4), (4,2), (4,1), (3,3), (3,1), (2,2), (2,1), (1,1)}.

Отношение R на множестве X называется *рефлексивным*, если для всех x ∈X выполняется условие (x, x) ∈ R.

Отношение R на множестве X называется нерефлексивным, если условие (x, x) ∈R не выполняется хотя бы при одном x ∈X .

Отношение R на множестве X называется *симметричным*, если из условия (x, y) ∈ R следует (y, x) ∈ R.

Отношение R на множестве X называется *несимметричным*, если для любых x, y ∈ X из условия (x, y) ∈ R следует (y, x) ∉ R.

Отношение R на множестве X называется *транзитивным*, если для любых x, y, z ∈ R из одновременного выполнения условий (x, y) ∈R и (y, z) ∈R следует (x, z) ∈R .

Пример 5.

Рассмотрим следующие отношения на множестве X = {1,2,3,4,5,6,7}:

G = {(x, y) | x, y ∈ X; x > y};

L = {(x, y) | x, y ∈ X; x ≤ y};

M = {(x, y) | x, y ∈X; (x - y) делится на 3};

K = {(x, y) | x, y ∈ X; $x^2 + y^2 \leq 20$}.

Исследуем, какими свойствами они обладают.

Среди приведенных в примере отношений *рефлексивными* являются отношение L (т. к. x ≤ x справедливо при всех x ∈X) и отношение M (т. к. x - x = 0 делится на 3, поэтому пара (x, x) принадлежит отношению M при всех x ∈X).

Симметричными являются отношения M (если x - y делится на 3, то и y - x делится на 3) и K (если $x^2 + y^2 \leq 20$, то и $y^2 + x^2 \leq 20$).

Транзитивными являются отношения G, L, M.

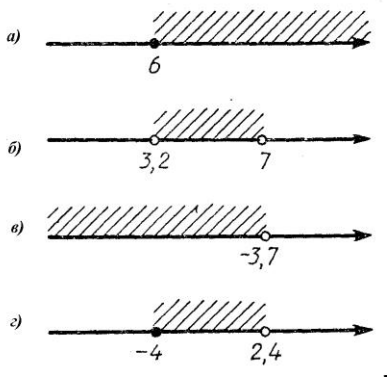
Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.

2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий:

1. Приведите примеры множеств, включающих в себя однородные объекты. Например, мебель – это множество, которое включает в себя стул, стол, сервант и пр.
2. Запишите с помощью математических символов следующие предложения:
    1. 4 натуральное число;
    2. 2,1 не является целым числом;
    3. множество В является подмножеством множества О;
    4. множества К и С равны;
3. Задайте множества А и В другим способом, если А ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,8}, В = {b, b ∈ N, b≤6}. Изобразите эти множества с помощью кругов Эйлера, каково отношение между этими множествами?
4. Сформулируйте определения понятий «характеристическое свойство множества», «равные множества», «подмножество».
5. Р – множество натуральных чисел, больших 7 и меньших 14. Выясните, какие из чисел 13, 10, 5, 7, 14 ему принадлежат, а какие не принадлежат. Запишите решение, используя математические символы.
6. А – множество решений уравнения $x^2+1=0$. Верно ли, что А – пустое множество? Приведите примеры уравнений, множество решений которых состоит из:
    1. одного элемента;
    2. двух элементов;
    3. трех элементов.
7. Запишите множество букв в слове «математика» и множество цифр в записи числа 515353.
8. Изобразите на координатной прямой множество Х, если:
    1. $X=\{x \mid x\in \Re;\ -2\le x\le 7\}$
    2. $X=\{x \mid x\in \Re;\ x<7\}$
    3. $X=\{x \mid x\in \Re;\ -2\le x<7\}$.
9. Задайте двумя способами множество точек координатной прямой (рис. 1)



Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №2

Тема: *«Множества точек на плоскости»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории множеств».

Краткие теоретические сведения см. Практическое занятие 1

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

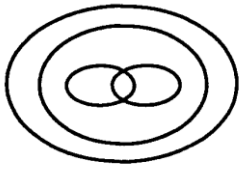
Запишите множество А, элементами которого являются натуральные числа, меньшие 8, используя символические записи характеристического свойства и перечисления элементов множества. Верно, ли, что: а) $5 \in$ А; б) $0 \in$ А; в) $8 \notin$ А?

1. Постройте прямую и отметьте на ней начало отсчета, единичный отрезок, точку А(5) и все точки, расстояние от которых от точки А: равно 2, не более 2.
2. Дано множество С = {213, 45, 324, 732, 136}. Составьте подмножества множества С, состоящие из чисел, которые:
    1. делятся на 3;
    2. не делятся на 4;
    3. не делятся на 5.

4.

A – множество натуральных чисел, меньших 20; B, C, E, H – подмножества множества A, такие, что B состоит из чисел, кратных 6, C – из чисел, кратных 2, E – из чисел, кратных 3, H – из чисел, кратных 2 и 3 одновременно. Перечислите элементы множеств A, B, C, E, H и укажите среди них равные множества.

5.



Отношения между множествами всех выпуклых четырехугольников, параллелограммов, прямоугольников, ромбов и квадратов изображены на рисунке. Покажите каждое из множеств.

6.

Пусть разные строчные буквы обозначают разные предметы. Для каких из следующих пар множеств имеет место отношение A⊂ B или B ⊂ A:

1.

A={a, b, c, d}, B = {a, c, d};

2.

A = {a, b}, B = {a, c, d};

3.

A =∅, B = ∅;

4.

A =∅, B = {a, b, c};

7.

Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношением включения:

1.

A = {x |x∈N, x > 2}, B = {y |y∈ N, y > 2};

2.

A ={x÷ xÎ R, x > 0}, B ={y÷y Î N, y > 0};

3.

A ={x÷ xÎ N, x2 > 4}, B ={x÷ xÎN, x2 > 5};

4.

A - множество многоугольников с периметром 4, B - множество квадратов с площадью 1?

8.

Равны ли следующие множества: A = {2, 4, 6} и B = {6, 4, 2}; A = {1, 2, 3} и B ={I, II, III}; A = {{1, 2} {2, 3}} и B = {2, 3, 1};

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

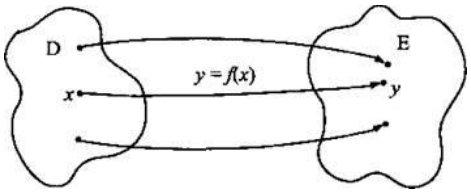
Практическое занятие №3

Тема: «Функции. Область определения и множество значений функции»

Цель работы:Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории множеств».

Краткие теоретические сведения.

Пусть даны два множества действительных чисел D и E и указан закон f по которому каждому числу $x \in D$ ставится в соответствие единственное число $y \in E$ (см. рис.). Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения (О.О.) D и областью значений (О.З.) E. При этом величину ***x*** называют **независимой переменной** (или **аргументом функции**), величину ***y*** - **зависимой переменной** (или **значением функции**).



Область определения функции $y = f(x)$ обозначают D(f), область значений E(f).

Другими словами, функцией называют такую зависимость переменной *y* от переменной *x,* при которой каждому значению переменной *x* соответствует единственное значение переменной *y*.

Пример 1

Рассмотрим функцию $y = \sqrt{x-2} + 3$. Для нахождения *y*для каждого значения *x* необходимо выполнить следующие операции: от величины *x* вычесть число 2 (x - 2), извлечь квадратный корень из этого выражения ($\sqrt{x-2}$) и, наконец, прибавить число 3 ($\sqrt{x-2}+3$). Совокупность этих операций (или закон, по которому для каждого значения *x* ищется величина *y*) и называется функцией *y*(*x*). Например, для $x = 6$ находим $y(6) = \sqrt{6-2} + 3 = \sqrt{4} + 3 = 2 + 3 = 5$. То есть для вычисления функции *y* в данной точке *x* необходимо подставить эту величину *x* в данную функцию *y*(*x*).

Очевидно, что для данной функции для любого допустимого числа *x* можно найти только одно значение *y* (т. е. каждому значению *x* соответствует одно значение *y*).

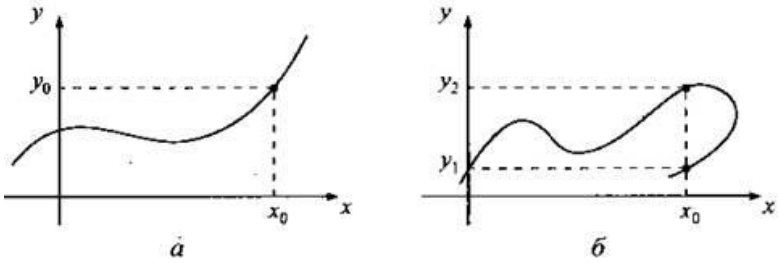
Рассмотрим теперь область определения и область значений этой функции. Извлечь квадратный корень из выражения (x - 2) можно только, если эта величина неотрицательная, т. е. $x - 2 \geq 0$, или $x \geq 2$. Поэтому область определения (О.О.) функции D(*y*) = [2; +∞). Так как по определению арифметического корня $0 \leq \sqrt{x-2} < +\infty$, то прибавив ко всем частям этого неравенства число 3, получим $3 \leq \sqrt{x-2} + 3 < +\infty$, или $3 \leq y < +\infty$. Поэтому область значений (О.З.) функции E(*y*) = [3; +∞).

Пример 2

Зависимость $y(x) = \begin{cases} 2x - 3, \\ x^2 + 1 \end{cases}$ уже не является функцией. Действительно, если мы хотим вычислить значение *y*, например, для $x = 1$, то, пользуясь верхней формулой, найдем $y = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, а пользуясь нижней формулой, получим $y = 1^2 + 1 = 2$. Таким образом, одному значению *x* ($x = 1$) соответствуют два значения *y* ($y = -1$ и $y = 2$). Поэтому эта зависимость (по определению) не является функцией.

Пример 3

Приведены графики двух зависимостей *y*(*x*). Определить, какая из них является функцией.



На рис. а приведён график функции, т. к. любой точке x_0 соответствует только одно значение y. На рис. б приведён график какой-то зависимости (но не функции), т. к. существуют такие точки (например, x_0), которым отвечает более одного значения y (например, значения y_1 и y_2).

2. Способы задания функций

1)Аналитический (с помощью формулы или формул)

Пример 4

Рассмотрим функции:

а)$y = x^2 + 3\sqrt{x}$;

б)$y = \begin{cases} x, & \text{если } x < 0, \\ x^2, & \text{если } x \geq 0. \end{cases}$

Несмотря на непривычную форму, это соотношение также задаёт функцию. Для любого значения *x* легко найти величину *y*. Например, для $x = -0{,}37$. Так как *x*< 0, то, пользуясь верхним выражением, получаем: $y(-0{,}37) = -0{,}37$. Для $x = \frac{2}{3}$ (т. к. *x*> 0, то пользуемся нижним выражением) имеем: $y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. Из способа нахождения *y* понятно, что любой величине *x* отвечает только одно значение *y*.

в)$3x + y = 2y - x^2$.

Выразим из этого соотношения величину *y*: $3x + x^2 = 2y - y$, или $x^2 + 3x = y$. Таким образом, это соотношение также задаёт функцию $y = x^2 + 3x$.

2) Табличный

Пример 5

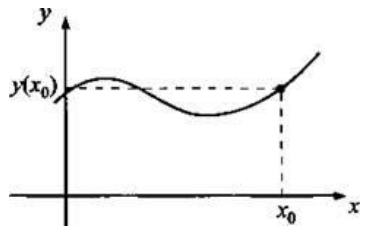
Выпишем таблицу квадратов *y* для чисел *x*.

x	1	1,5	2	2,5	3	4	5	6	7
y	1	2,25	4	6,25	9	16	25	36	49

Такая таблица также задаёт функцию: для каждого (приведённого в таблице) значения *x* можно найти единственное значение *y*. Например, *y*(1,5) = 2,25, *y*(5) = 25 и т. д.

3) Графический

В прямоугольной системе координат для изображения функциональной зависимости *y*(*x*) удобно пользоваться специальным рисунком - графиком функции.



Графиком функции $y(x)$ называют множество всех точек системы координат, абсциссы которых равны значениям независимой переменной x, а ординаты - соответствующим значениям зависимой переменной y.

В силу такого определения все пары точек (x_0, y_0), которые удовлетворяют функциональной зависимости $y(x)$, расположены на графике функции. Любые другие пары точек, не удовлетворяющие зависимости $y(x)$, на графике функции не лежат.

Пример 6

Дана функция $y = 2x - 3|x| + 4$. Принадлежит ли графику этой функции точка с координатами: а) (-2; -6); б) (-3; -10)?

а) Найдём значение функции y при x = -2: $y(-2) = 2 \cdot (-2) - 3|-2| + 4 = -4 - 3 \cdot 2 + 4 = -6$. Так как $y(-2) = -6$, то точка А(-2; -6) принадлежит графику данной функции.

б) Определим значение функции y при x = -3: $y(-3) = 2 \cdot (-3) - 3|-3| + 4 = -6 - 3 \cdot 3 + 4 = -11$. Так как $y(-3) = -11$, то точка В(-3; -10) не принадлежит графику этой функции.

Сравним различные способы задания функции. Наиболее полным следует считать аналитический способ. Этот способ позволяет составить таблицу значений функции для некоторых значений аргументов, построить график функции, провести необходимое исследование функции. Вместе с тем табличный способ позволяет быстро и легко найти значение функции для некоторых значений аргумента. График функции наглядно показывает её поведение. Поэтому противопоставлять различные способы задания функции не следует: каждый из них имеет свои преимущества и свои недостатки. На практике используются все три способа задания функции.

Пример 7

Дана функция $y = 2x^2 - 3x + 1$. Найти: а) $y(2)$; б) $y(-3x)$; в) $y(x + 1)$.

Для того чтобы найти значение функции при каком-то значении аргумента, необходимо подставить это значение аргумента в аналитический вид функции. Поэтому получим:

а) $y(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 = 8 - 6 + 1 = 2 + 1 = 3$;

б) $y(-3x) = 2 \cdot (-3 \cdot x)^2 - 3 \cdot (-3 \cdot x) + 1 = 18 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1 = 18x^2 + 9x + 1$.

в) $y(x + 1) = 2 \cdot (x + 1)^2 - 3 \cdot (x + 1) + 1 = 2 \cdot (x^2 + 2 \cdot x + 1) - 3 \cdot x - 3 + 1 = 2 \cdot x^2 + x = 2x^2 + x$.

Пример 8

Известно, что $y(3 - x) = 2x^2 - 4$. Найти: а) $y(x)$; б) $y(-2)$.

а) Обозначим буквой $z = 3 - x$, тогда $x = 3 - z$. Подставим это значение x в аналитический вид данной функции $y(3 - x) = 2x^2 - 4$ и получим: $y(3 - (3 - z))^2 - 4$, или $y(z) = 2 \cdot (3 - z)^2 - 4$, или $y(z) = 2 \cdot (9 - 6z + z^2) - 4$, или $y(z) = 2z^2 - 12z + 14$. Так как безразлично, какой буквой обозначен аргумент функции: z, x, t или любой другой, то сразу получаем: $y(x) = 2x^2 - 12x + 14$.

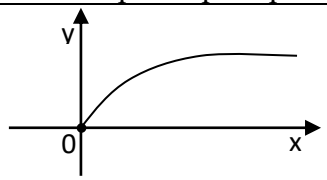
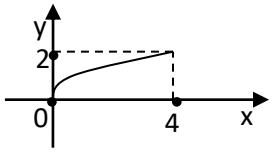
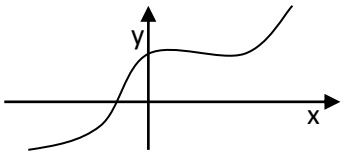
б) Теперь легко найти $y(-2) = 2 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 14 = 8 + 24 + 14 = 46$.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Объяснить, что запись $y = f(x)$ представляет собой правило f, с помощью которого, зная конкретное значение независимой переменной x, можно найти соответственное значение переменной y.
2. Ввести определение понятий: функция и график функции.
3. Ввести понятие $D(f)$ - области определения функции.
4. Ввести понятие $E(f)$ - области значения функции.
5. Рассмотреть примеры:

	$y = f(x) = \sqrt{x}, \quad x \geq 0$ $D(f) = [0;+\infty)$ $E(x) = [0;+\infty)$
	$y = f(x) = \sqrt{x}, \quad 0 \leq x \leq 4$ $D(f) = [0;4]$ $E(x) = [0;2]$
	$y = g(x)$ $D(x) = (-\infty;+\infty)$ $E(x) = (-\infty;+\infty)$

6.Рассмотреть более сложные функции и без построения графика найти $D(f)$, придерживаясь схемы:

$y = f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$	$D(f)$: $h(x) \neq 0$
$y = f(x) = \sqrt{t(x)}$	$D(f)$: $t(x) \geq 0$
$y = f(x) = \dfrac{p(x)}{\sqrt{d(x)}}$	$D(f)$: $d(x) > 0$

7.Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{3-x}{|x|-5}$;

б) $y = \frac{6x^2-3x+1}{|x-2|-1}$;

в) $y = \frac{3-x}{2-\frac{x}{x+5}}$;

г) $y = \frac{7x^2-14}{3-\frac{|x|}{x+2}}$;

д) $y=\frac{5x^2-3x-2}{7-\frac{|x-3|}{x+3}}$;

е) $y=\frac{\sqrt{3-|x+1|}}{x+2}$;

ж) $y=\frac{\sqrt{|5x+2|-3}}{(x+2)\cdot(x-1)}$;

з) $y=\frac{\sqrt{|x+1|-2}}{\sqrt{5-|x-1|}}$.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №4

Тема: «Решение комбинаторных задач»

Цель работы: Используя формулы комбинаторики и образцы решения задач,решить задачи по теме «Комбинаторика».

Краткие теоретические сведения.

Комбинаторика - раздел математики, в котором изучаются простейшие «соединения». Перестановки - соединения, которые можно составить из n предметов, меняя всеми возможными способами их порядок; число их Размещения - соединения, содержащие по m предметов из числа n данных, различающиеся либо порядком предметов, либо самими предметами; число их Сочетания - соединения, содержащие по m предметов из n, различающиеся друг от друга, по крайней мере, одним предметом

Решить комбинаторную задачу - это значит выписать все возможные комбинации, составленные из чисел, слов, предметов и др., отвечающих условию задачи.

Факториал

Определение. Произведение всех последовательных натуральных чисел от 1 до n обозначается n!

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$

Точные значения факториалов

Размещениями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

Сочетаниями из n элементов по m называются такие соединения, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

Перестановками из n элементов называются такие соединения из n элементов, которые отличаются друг от друга лишь порядком следования элементов.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.

2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1.Вычислить $\frac{6!-4!}{3!}$

2. Вычислить $\frac{5!3!}{6!}$

3.Упростить $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$

4. Упростить $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$

5.Вычислить $\frac{P_6-P_5}{P_4}$

6.Вычислить A_8^4

7. Вычислить C_{10}^4

8. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «солнце», «молоко»?

9.Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,8,9 так, чтобы в каждом числе не было одинаковых цифр?

10. Учащиеся изучают 12. Предметов. Сколькими способами можно составить расписание уроков на один день так, чтобы 6 уроков были различными?

11. Сколькими способами можно составить дежурство по классу по 4 человека, если в классе 28 человек?

12.Решить уравнение $C_{x-2}^2=21$

Вариант 1

1. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 5 различных уроков?

2. На 1 курсе 12 учащихся, имеющих по математике оценки «4-5». Сколькими способами можно сформировать команду из 4 человек для участия в математической олимпиаде?

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в записи которых можно использовать цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе должны быть различными?

Вариант 2

1. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

2. Имеются помидоры, огурцы, лук. Сколько различных салатов можно приготовить, если в каждый салат должно входить 2 различных вида овощей?

3. Сколькими способами из 8 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 4 различных уроков.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №5

Тема: *«Размещения. Перестановки. Сочетания»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Комбинаторика».

Краткие теоретические сведения.

Размещениями из **n** элементов по **m** элементов (m < n) называются комбинации, составленные из данных **n** элементов по **m** элементов, которые отличаются либо самими элементами, либо порядком элементов.

Число размещений без повторений из **n** по **m** (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}$$

Размещениями с повторениями из **n** элементов по **m** называются упорядоченные **m**-элементные выборки, в которых элементы могут **повторяться**.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\widetilde{A}_n^m = n^m$$

Перестановки

Перестановками из **n** элементов называются размещения из этих n элементов по **n** (Перестановки - частный случай размещений).

Число перестановок без повторений (n различных элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Число перестановок с повторениями (k различных элементов, где элементы могут повторяться $m_1, m_2, \ldots, m_k$ раз и $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, где n - общее количество элементов) вычисляется по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_k!}.$$

Правило суммы.

Если элемент a можно выбрать m способами, а элемент b – n способами, причем любой выбор элемента a отличен от любого выбора элемента b, то выбор "a или b" можно сделать m + n способами.

Правило произведения.

Если из некоторого множества A элемент a_i можно выбрать K_A способами, а элемент b_j из множества B – K_B способами, то совокупность (a_i ;b_j) можно образовать K_A* K_B способами. Правило верно и для совокупностей, состоящих из большего, чем два числа элементов.

Перестановки с повторением.

Иногда требуется переставлять предметы, некоторые из которых неотличимы друг от друга. Рассмотрим такой вариант перестановок, который называется перестановками с повторениями.

Пусть имеется n_1предметов 1-го типа, n_2 предмета 2-го, $n_к$предметов k-го типа и при этом $n_1 + n_2 + \ldots + n_к = n$. Количество разных перестановок предметов

$$P(n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k) = \frac{n!}{(n_1! n_2! n_3! \ldots n_k!)}$$

Размещения с повторениями.

Пусть даны элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (a)

Размещением с повторениями из n элементов по k элементов называется всякая упорядоченная последовательность из k элементов, членами которой являются данные элементы. В размещении с повторениями один и тот же элемент может находиться на нескольких различных местах.

Формула для числа размещений с повторениями.

Каждый элемент может быть выбран n способами, поэтому :

$\overline{A}_n^k = n^k$, где $\overline{A}_n^k$ -обозначение размещений с повторениями .

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Сколько существует двузначных чисел, которые записываются различными цифрами?
2. Сколькими способами из отряда в 20 человек можно выбрать командира и знаменосца?
3. Сколькими различными способами можно построить в шеренгу 5 человек?
4. Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя цифры 3,4, 5 и 6? Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя при записи числа каждую из указанных цифр только один раз? Запишите эти числа.

5. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех различных, не равных нулю цифр? Зависит ли результат от того, какие цифры взяты? Укажите какой-нибудь способ перебора трехзначных чисел, при котором ни одно число не может быть пропущено.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №6

Тема: *«Логические операции над высказываниями»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы математической логики».

Краткие теоретические сведения:

Предикат – это высказывание, в которое можно подставлять аргументы. Если аргумент один – то предикат выражает свойство аргумента, если больше – то отношение между аргументами.

Пример предикатов. Возьмём высказывания: ``Сократ - человек", ``Платон - человек". Оба эти высказывания выражают свойство ``быть человеком". Таким образом, мы можем рассматривать предикат ``быть человеком" и говорить, что он выполняется для Сократа и Платона.

Пример рассуждения, не выразимого в логике высказываний. Все люди смертны. Сократ - человек. Следовательно, Сократ смертен.

Это рассуждение на языке логики высказываний можно записать тремя отдельными высказываниями. Однако никакой связи между ними установить не удастся. На языке логики предикатов эти предложения можно выразить с помощью двух предикатов: ``быть человеком" и быть смертным". Первое предложение устанавливает связь между этими предикатами.

Язык логики предикатов

Предикатная сигнатура – это множество символов двух типов – *объектные константы* и *предикатные константы* – с неотрицательным целым числом, называемым *арностью*, назначенным каждой предикатной константе. Предикатную константу мы будем называть *пропозициональной*, если её арность равна 0. Пропозициональные константы являются аналогом атомов в логике высказываний. Предикатная константа *унарна*, если её арность равна 1, и *бинарна*, если её арность равна 2. Например, мы можем определить предикатную сигнатуру{ *a, P, Q* },

объявляя *a* объектной константой, *P* – унарной предикатной константой, и *Q* – бинарной предикатной константой.

Определение. Квантором всеобщности (обозначение - ∀) высказывания $A(x)$, $x \in X$, называется логическая операция, имеющая значение "истина", если высказывание $A(x)$ истинно для любого элемента $x \in X$, и значение "ложь" в противоположном случае (т.е. в случае, когда хотя бы для одного $x \in X$ высказывание $A(x)$ ложно).

Примеры: высказывание ("$\forall \boldsymbol{x} \in [-2,4]$, $\boldsymbol{x}^2 > -2$) - истинно, высказывание ("$\forall \boldsymbol{x} \in [-2,4]$, $\boldsymbol{x}^2 > 16$) - ложно, высказывание ("$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{x}^2 > 0$) - истинно, высказывание ("$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x}^2 > 0$) - ложно.

Определение. Квантором существования (обозначение - ∃) высказывания $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, называется логическая операция, имеющая значение "истина", если высказывание $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$истинно хотя бы для одного элемента $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, и значение "ложь" в противоположном случае (т.е. в случае, когда высказывание $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ ложно для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$).

Формула $\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ читается как "существует (найдётся) (хотя бы один) элемент $\boldsymbol{x}$, принадлежащий $\boldsymbol{X}$, для которого справедливо $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$". Формальное определение квантора существования:

Примеры: высказывание ($\exists \boldsymbol{x} \in [-2,4]$, $\boldsymbol{x}^2 > 20$) - ложно, высказывание ($\exists \boldsymbol{x} \in [-2,4]$, $\boldsymbol{x}^2 > 10$) - истинно, высказывание ($\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{x}^2 = 0$) - ложно, высказывание ($\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x}^2 = 0$) - истинно.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.

2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1. Проверить истинность высказывания:
а) Чтобы завтра пойти на занятия, я должен встать рано. Если я сегодня пойду в кино, то лягу спать поздно. Если я лягу спать поздно, то встану поздно. Следовательно, либо я не пойду в кино, либо не пойду на занятия.
б) Я пойду либо в кино, либо в бассейн. Если я пойду в кино, то получу эстетическое удовольствие. Если я пойду в бассейн, то получу физическое удовольствие. Следовательно, если я получу физическое удовольствие, то не получу эстетического удовольствия.
2. На вопрос: «Кто из трех студентов изучал дискретную математику?» получен верный ответ: «Если изучал первый, то изучал и третий, но неверно, что если изучал второй, то изучал и третий». Кто изучал дискретную математику?
3. Определите, кто из четырех студентов сдал экзамен, если известно:
если первый сдал, то и второй сдал;
если второй сдал, то третий сдал или первый не сдал;
если четвертый не сдал, то первый сдал, а третий не сдал;
если четвертый сдал, то и первый сдал.
4. Вычислите значение функции $f(x, y, z)$ при заданных значениях аргументов

$f(x, y, z) = z \vee (y \cdot x \vee \bar{z})$

$a)$ *при* $x = 0,\ y = 1,\ z = 0;$

$b)$ *при* $x = 1,\ y = 1,\ z = 0.$

5. Определить тождественно истинность формулы $x \cdot y \vee \overline{x \vee y} \vee x$
6. Определить тождественно ложность формулы $\overline{x \vee y} \cdot (x \cdot \bar{y})$

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №7
Тема: *«Равносильные преобразования»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы математической логики».

Краткие теоретические сведения:

Множество высказываний с введенными для них логическими операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания основными законами этих действий называется *алгеброй Буля*.

Алгебра Буля – исторически первый раздел математической логики, разработанный ирландским логиком и математиком Дж. Булем (GeorgeBoole, 1815 – 1864 г.г.). В середине XIX в. Буль применил алгебраические методы для решения логических задач и сформулировал на языке алгебры некоторые фундаментальные законы мышления

Законы алгебры Буля.

Коммутативные законы:

$x \wedge y \equiv y \wedge x$;

$x \vee y \equiv y \vee x$.

Ассоциативные законы:

$x \wedge (y \wedge z) \equiv (x \wedge y) \wedge z$;

$x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$.

Дистрибутивные законы:

$x \wedge (y \vee z) \equiv (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Идемпотентные законы:

$x \wedge x \equiv x$;

$x \vee x \equiv x$.

Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

$x \wedge 0 \equiv 0$;

$x \vee 0 \equiv x$;

$x \wedge 1 \equiv x$;

$x \vee 1 \equiv 1$.

Законы операции «черта»:

$\overline{\overline{x}} \equiv x$;

$x \vee 0 \equiv x$;

$x \vee 1 \equiv 1$;

$\overline{x} \wedge x \equiv 0$;

$\overline{x} \vee x \equiv 1$.

Законы Де Моргана (AugustusdeMorgan, 1806- 1871 – шотландский математик и логик; профессор математики в Университетском колледже Лондона):

1. $\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
2. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \wedge \overline{y}$.

Формулы алгебры логики

Формулами алгебры логики называются выражения, полученные из переменных *x, y,…* посредством применения логических операций: отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, а также сами переменные, принимающие значения истинности высказываний *x, y, ….*

Если в формулу алгебры логики вместо переменных *x, y, …* подставить конкретные высказывания, то получится высказывание, имеющее логическое значение «1» или «0».

Пример 1:

2. Доказать с помощью таблицы истинности Законы логического сложения и умножения с 0 и 1:

$x \wedge 0 \equiv 0$;

$x \vee 0 \equiv x$;

$x \wedge 1 \equiv x$;

$x \vee 1 \equiv 1$;

Составим таблицы истинности для данных выражений:

x	$x \wedge 0$	$x \vee 0$	$x \wedge 1$	$x \vee 1$
1	0	1	1	1
0	0	0	0	1

Пример 2:

1.Упростить формулу$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Решение:

Раскроем скобки:$(A \vee B) \wedge (A \vee C) = A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C$;

По закону идемпотентности$A \wedge A = A$, следовательно,

$A \wedge A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C$;

В высказыванияхAи$A \wedge C$вынесем за скобкиAи используя свойство$A + 1 = 1$, получим

$A \vee A \wedge C \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee C) \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \vee B \wedge A \vee B \wedge C$;

Аналогично предыдущему пункту вынесем за скобки высказываниеA.

$A \vee B \wedge A \vee B \wedge C = A \wedge (1 \vee B) \vee B \wedge C = A \vee B \wedge C$.

Таким образом, мы доказали закон дистрибутивности.

Всякую формулу можно преобразовать так, что в ней не будет отрицаний сложных высказываний – все отрицания будут применяться только к простым высказываниям.

2.Упростить выражения $\overline{AB} + \overline{B}$, $\overline{\overline{BC} + C}$, $\overline{\overline{AC}} + B\overline{C}$ так, чтобы в полученных формулах не содержалось отрицания сложных высказываний.

Решение:

$X = \overline{AB} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{B} = \overline{A} + \overline{B}$;

$Y = \overline{\overline{BC} + C} = (B + \overline{C})\overline{C} = \overline{C}$;

$\overline{\overline{AC}} + B\overline{C} = A + \overline{C} + B\overline{C} = A + \overline{C}$.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу

Перечень заданий.

1 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$A(x,y,z) \equiv \overline{x} \vee ((\overline{y} \vee z) \to z\overline{y})$$

$$B(x,y,z) \equiv (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge \overline{x \wedge y \wedge z})$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$G \equiv (a \to b) \wedge (b \to c) \wedge (\overline{a \to b})$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(X \wedge Z \to Y \wedge Z) \to (Y \to Z)$

2 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{xz} \vee xy \vee x\overline{z}$$

$$B = z \to xy$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$\overline{x \wedge y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$\left((X \to Y) \wedge (X \to \overline{Y})\right) \to \overline{X}$

3 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z$$

$$B = y \to (x \to z)$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \wedge y \leftrightarrow y \wedge x$;

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$$\left(X \to \overline{Y}\right) \to ((X \to Y) \to \overline{X})$$

4 вариант.

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = x \to (xy \to ((x \to y) \to y) \to z$$

$$B = y \to (x \to z)$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \wedge (y \vee z) \leftrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$;

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$\overline{Y} \to ((\overline{Y} \to X) \wedge (X \to Y))$;

5 вариант

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = (x|y \to z) \vee (x \to z)$$

$$B = (x \to y) \vee z$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной: $x \wedge x \leftrightarrow x$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$(Y \leftrightarrow X) \rightarrow (X \rightarrow (X \wedge Y))$;

6 вариант

1. Доказать равносильность двух данных формул:

$$U = \overline{xz} \vee xy \vee x\bar{z}$$

$$B = z \rightarrow xy$$

2. Установить, является формула тождественно истинной или тождественно ложной:

$$\overline{x \wedge y} \leftrightarrow \bar{x} \vee \bar{y}$$

3. С помощью равносильных преобразований упростите формулу.

$((X \wedge \bar{Y}) \rightarrow Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)$;

Содержание отчета

Отчет должен содержать:
1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №8

Тема: *«Разложение булевых функций по переменным. СКНФ и СДНФ»*

Цель работы:Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы математической логики».

Краткие теоретические сведения.

Если X, Y, Z – логические переменные то, применяя к ним операции конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания, можно получить формулы алгебры логики.

При задании конкретных значений переменных формула принимает определенное значение. Таким образом, каждая формула определяет некоторую *логическую функцию,* переменными которой являются переменные высказывания.

Переменные и функции принимают только два значения (1 или 0), поэтому логические функции можно описать конечной таблицей, которую называют *таблицей истинности.*

Рассмотренные выше логические выражения определяют основные функции двух переменных f(x, y) формулами: $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \rightarrow y$, $x \sim y$, $\bar{x}$.Ниже приведена их таблица истинности (табл. 1).

Таблица 1. Таблица истинности основных функций

x	y	x∧y	x∨y	x → y	x~y	$\bar{x}$
0	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	0

Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая логическое значение (1 или 0**)** изависящая от логических переменных, называется *логической функцией.*

Область определения логической функции – совокупность всевозможных n-мерных наборов из нулей и единиц, а для её задания достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов (табл.2.)

Наборы в таблице будем располагать в порядке возрастания их номера N**.** Такой порядок расположения наборов называется *стандартным* или *естественным.*

При таком порядке каждому набору $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_i есть 0 или 1, ставится в соответствие целое число $N = \alpha_1 2^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} 2^1 + \alpha_n$.

Наборам (0, 0, ...,0, 0), (0, 0, ..., 0, 1), ..., (1, 1, ..., 1, 1)соответствуют числа N = 0, 1,..., 2^n-1. Количество входных наборов для функции n переменных равно k = 2^n.

Таблица 2. Задание логической функции

N	x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2,..., x_{n-1}, x_n)$
0	0	0	…	0	0	f(0, 0, ..., 0, 0)
1	0	0	…	0	1	f(0, 0, ..., 0, l)
…	…	…	…	…	…	……
2^n-2	1	1	…	1	0	f(l, 1, …, 1, 0)
2^n-1	1	1	…	1	1	f(l, 1, …,1, 1)

Все множество наборов переменных по значениям функции на них можно разбить на 2 подмножества:
[1] – единичное множество наборов, на которых f = 1;
[0] – нулевое множество наборов, на которых f = 0.
Теперь определим количество различных функций n переменных. Каждая функция задается набором своих k значений, которому также можно поставить в соответствие k-разрядное двоичное число.
Располагая функции в таблице в порядке возрастания соответствующих им чисел, мы получим все возможные различные функции. Количество таких функций будет равно $2^k = 2^{2^n}$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная формой (СДНФ).

$$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigvee_{f(\sigma)=1} x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge ... \wedge x_n^{\sigma_n}.$$

Эта формула называется совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) функции $f(x_1, x_2,..., x_n)$.
*Следствие.*Для произвольной логической функции существует взаимнооднозначное соответствие между ее СДНФ и таблицей истинности:
а) СДНФ содержит ровно столько элементарных конъюнкций, сколько единичных наборов у функции;
б) каждому единичному набору $\sigma = (\sigma_1, …, \sigma_n)$ соответствует элементарная конъюнкция всех переменных функции, в которой для $\sigma_i = 0$переменная x_iберется с отрицанием и для$\sigma_i = 1$–без отрицания**.**
Совершенная конъюнктивная нормальная формой (СКНФ).

$f(x_1, x_2,..., x_n) = \bigwedge_{\forall \sigma: f(\sigma)=0} (x_1^{\bar{\sigma}_1} \vee x_2^{\bar{\sigma}_2} \vee ... \vee x_n^{\bar{\sigma}_n})$**.** Эта форма называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (СКНФ).
*Следствие.*Для произвольной логической функции также существует взаимнооднозначное соответствие между ее СКНФ и таблицей истинности:
а) СКНФ содержит ровно столько элементарных дизъюнкций, сколько нулевых наборов у функции;
б) каждому нулевому набору $\sigma = (\sigma_1, …, \sigma_n)$ соответствует элементарная дизъюнкция всех переменных функции, в которой для $\sigma_i = 1$ переменная x_i берется с отрицанием и для $\sigma_i = 0$ – без отрицания.
Минимизация ДНФ
Метод получения сокращённой ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ из ее совершенной ДНФ состоит в применении следующих эквивалентных преобразований:
а) операции полного склеивания, которая состоит в замене выражения $A\,x \vee A\,\bar{x}$ на A, так как
$A\,x \vee A\,\bar{x} \equiv A\,(x \vee \bar{x}) \equiv A \cdot 1 \equiv A$;
б) операции неполного склеивания, которая состоит в замене $A\,x \vee A\,\bar{x}$ на $A\,x \vee A\,\bar{x} \vee A$, так как
$A\,x \vee A\,\bar{x} \vee A \equiv A\,(x \vee \bar{x}) \vee A \equiv A \bullet 1 \vee A = A$;
в) операции поглощения, которая состоит в замене $AB \vee A$ на A, так как
$AB \vee A \equiv A\,(B \vee 1) \equiv A$.
Здесь A и B – произвольные элементарные конъюнкции.
Теорема: Сокращённую ДНФ функции $f(x_1, ..., x_n)$ можно получить из ее совершенной ДНФ, применяя все возможные операции неполного склеивания, а затем операции поглощения.

Порядок проведения работы:

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

1. По заданной таблице истинности построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму.

x_1	X_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$		x_1	x_2	x_3	$f(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0			1	0	0	
0	0	1			1	0	1	

0	1	0			1	1	0	
0	1	1			1	1	1	

2. По заданной таблице истинности построить совершенную конъюнктивную нормальную форму.

3. Определить сложность форм и выполнить упрощение их. Объясните полученные результаты

5. Каждый из четырех гномов - Дварин, Ринин, Ферин и Торин - либо всегда говорит правду, либо всегда врет. Однажды они начали спорить, кто из них врет, а кто нет. Вот часть их разговора: Дварин - Ирину: «Ты врун», Ферин – Дварину: «Это ты врун», Торин – Ферину: «Дварин и Ринин – оба вруны. И ты тоже!» Кто из гномов говорит правду, а кто врет, если известно, что Ринин всегда говорит правду? В ответе укажите сначала первые буквы имен гномов? В ответе укажитесначала первые буквы имен гномов, которые говорят правду, в алфавитном порядке,а затем тех, которые лгут, тоже в алфавитном порядке.

6. На столе лежат в ряд четыре предмета: ручка, карандаш, фломастер и маркер. Они окрашены в разные цвета: оранжевый, синий, желтый, зеленый. Известно, что фломастер лежит правее и ручки, и карандаша; синий предмет лежит между оранжевым и зеленым; слева от желтого предмета лежит карандаш; маркер и карандаш лежит не с краю; синий и оранжевый предметы лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат предметы и какого они цвета.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат

Практическое занятие №9
Тема: *«Многочлен Жегалкина»*

Цель работы:Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы математической логики».

Краткие теоретические сведения.

Многочлены алгебры логики строятся по аналогии с обычными многочленами. Умножение заменяем конъюнкцией, а сложение альтернативной дизъюнкцией (сложением по модулю два).

Многочленом Жегалкина называется альтернативная дизъюнкция, каждый член которой представляет собой конъюнкцию переменных или переменные, или 1.

Любая функция может быть представлена многочленом (полиномом) Жегалкина и это представление единственно. Функция является линейной, если многочлен Жегалкина не содержит конъюнкции переменных.

Пример:

Записать булеву функцию $f(x,y,z)=(x\vee\bar{y})\to(z\Leftrightarrow x)$ в виде многочлена Жегалкина. Определить, является ли функция линейной.

Решение:

Преобразуем равенство, используя формулы алгебры логики.

$$(x\vee\bar{y})\to(z\Leftrightarrow x)`=(x\bar{y}\oplus x\oplus\bar{y})\to(z\oplus x\oplus 1)=$$
$$=(x\bar{y}\oplus x\oplus\bar{y})(z\oplus x\oplus 1)\oplus(x\bar{y}\oplus x\oplus\bar{y})\oplus 1=$$
$$=x\bar{y}z\oplus x\bar{y}x\oplus x\bar{y}\oplus xz\oplus x\oplus x\oplus\bar{y}z\oplus\bar{y}x\oplus\bar{y}\oplus x\bar{y}\oplus x\oplus$$
$$\oplus\bar{y}\oplus 1=xz(y\oplus 1)\oplus x\bar{y}\oplus x\bar{y}\oplus xz\oplus(y\oplus 1)z\oplus\bar{y}\oplus x\oplus$$
$$\oplus\bar{y}\oplus 1=xyz\oplus xz\oplus xz\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1=xyz\oplus yz\oplus z\oplus x\oplus 1$$

Функция не является линейной, т.к. многочлен Жегалкина содержит конъюнкции переменных.

Многочлен Жегалкина, соответствующий данной функции:

$$f(x;y;z) = xyz \oplus yz \oplus z \oplus x \oplus 1$$

Порядок проведения работы:

3. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
4. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

1 вариант

1. Проверить правильность формул, используя таблицы истинности:

$\bar{x} = x \oplus 1;\ x \oplus x = 0;\ x \vee y = xy \oplus x \oplus y;\ x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1;\ x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$

$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1;\ x \mid y = xy \oplus 1.$

2. Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции $a \oplus в$:

Ответы: *а*) $ав \vee \bar{а}\bar{в}$ *б*) $а\bar{в} \vee \bar{а}в$ *в*) $\bar{а} \wedge \bar{в}$ *г*) $\bar{а} \vee в$

3. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: *а*) $xy \oplus x \oplus 1$ *б*) $x \oplus y$ *в*) $xy \oplus 1$ *г*) $xy \oplus x$

4. Представить функцию $f(x, y.z) = \overline{x \Rightarrow y} \Rightarrow z$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

5. Построить таблицу истинности для функции $f(x, y.z) = \overline{xy} \Rightarrow (z \vee x)$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

2 вариант

1. Проверить правильность формул, используя таблицы истинности:

$\bar{x} = x \oplus 1;\ x \oplus x = 0;\ x \vee y = xy \oplus x \oplus y;\ x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1;\ x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$

$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1;\ x \mid y = xy \oplus 1.$

2. Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции $a \oplus в$:

Ответы: *а*) $ав \vee \bar{а}\bar{в}$ *б*) $а\bar{в} \vee \bar{а}в$ *в*) $\bar{а} \wedge \bar{в}$ *г*) $\bar{а} \vee в$

3. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: *а*) $xy \oplus x \oplus 1$ *б*) $x \oplus y$ *в*) $xy \oplus 1$ *г*) $xy \oplus x$

4. Представить функцию $f(x, y.z) = \overline{x \vee y} \vee (x \downarrow z)$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

5. Построить таблицу истинности для функции $f(x, y.z) = \overline{x \Leftrightarrow y} \Rightarrow z$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

3 вариант

1. Проверить правильность формул, используя таблицы истинности:

$\bar{x} = x \oplus 1;\ x \oplus x = 0;\ x \vee y = xy \oplus x \oplus y;\ x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1;\ x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$

$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1;\ x \mid y = xy \oplus 1.$

2. Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции $a \oplus в$:

Ответы: $а) ав \vee \bar{а}\bar{в}$ $б) а\bar{в} \vee \bar{а}в$ $в) \bar{а} \wedge \bar{в}$ $г) \bar{а} \vee в$

3. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: $а) xy \oplus x \oplus 1$ $б) x \oplus y$ $в) xy \oplus 1$ $г) xy \oplus x$

4. Представить функцию $f(x, y.z) = \overline{x \Leftrightarrow y} \vee z$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

5. Построить таблицу истинности для функции $f(x, y.z) = \overline{x \vee y} \Leftrightarrow z$, найти СДНФ, упростить ее. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

4 вариант

1. Проверить правильность формул, используя таблицы истинности:

$\bar{x} = x \oplus 1;\ x \oplus x = 0;\ x \vee y = xy \oplus x \oplus y;\ x \Rightarrow y = xy \oplus x \oplus 1;\ x \Leftrightarrow y = x \oplus y \oplus 1;$

$x \downarrow y = xy \oplus x \oplus y \oplus 1;\ x \mid y = xy \oplus 1.$

2. Выбрать правило исключения альтернативной дизъюнкции $a \oplus в$:

Ответы: $а) ав \vee \bar{а}\bar{в}$ $б) а\bar{в} \vee \bar{а}в$ $в) \bar{а} \wedge \bar{в}$ $г) \bar{а} \vee в$

3. Найти среди многочленов Жегалкина линейный:

Ответы: $а) xy \oplus x \oplus 1$ $б) x \oplus y$ $в) xy \oplus 1$ $г) xy \oplus x$

4. Представить функцию $f(x, y.z) = \overline{x \Rightarrow y} \downarrow z$ в виде многочлена Жегалкина, используя формулы алгебры логики. Определить, является ли функция линейной.

5. Построить таблицу истинности для функции $f(x, y.z) = \overline{x \vee y} \mid z$, найти СДНФ. Построить контактную схему, реализующую эту функцию. Представить функцию в виде многочлена Жегалкина.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы
2.Цель работы
3.Задание
4.Формулы расчета
5.Результат

Практическое занятие №10
Тема: *«Способы задания графов»*

Цель работы: Используя теоретический материал и образцы решения задач, решить примеры по теме «Основы теории графов».

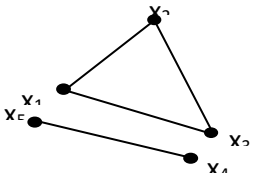
Краткие теоретические сведения.

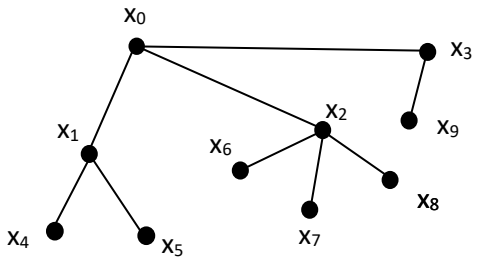
Граф G задается множеством *вершин* (точек) $X = \{x_1, ..., x_n\}$ и множеством *ребер* (линий) $A = \{a_1, .., a_n\}$, соединяющих между собой все или часть этих вершин. Таким образом, граф G полностью определяется заданием двух множеств (X, A).

Ребра графа – линии, соединяющие вершины, указывают на соответствие между вершинами в графе. Запись $g = (x_i, x_j)$ говорит, что ребро g*инцидентно* вершинам x_i и x_j, а вершины x_i, x_j*инцидентны* ребру g. Две вершины x_i, x_j называются *смежными*, если они определяют ребро графа. Два ребра графа называются *смежными*, если их концы имеют общую вершину.

Степенью m(x) графа G(X) в вершине x называется число ребер, инцидентных вершине x.

Маршрутом в произвольном графе называется чередующаяся последовательность вершин и ребер, начинающаяся и заканчивающаяся вершиной.





Цепь – последовательность ребер $S = (g_1, g_2, ..., g_n)$, в которой у каждого ребра g_k одна из вершин является вершиной ребра g_{k-1}, а другая - вершиной ребра g_{k+1}. При этом одно и то же ребро или вершина может встречаться несколько раз. Пример цепи для графа (рис. 7):

$S = (g_0, g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_2, g_6) = ((x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_1, x_4), (x_4, x_3), (x_3, x_2), (x_2, x_5))$.

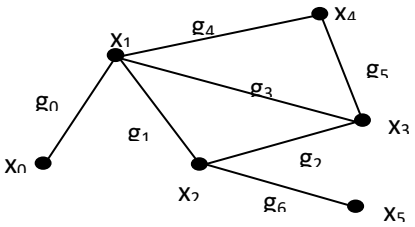


Рис. 6. Пример цепи

Подграфом $G_A(A)$ графа G(X), где $A \subset X$, называется граф, вершинами которого являются элементы множества $A \subset X$, а ребрами – все ребра из G, концевые вершины которых лежат в A (рис. 8).

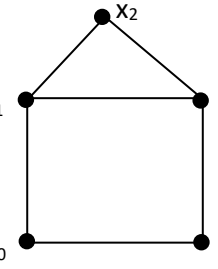


Рис. 7. Граф G(X)

Таким образом, подграф содержит *часть* *вершин* вместе с ребрами, соединяющими эти вершины. Иначе, $G_A(A)$ – подграф графа G(X), если $A \subset X$ и $G_A(x) = G(x) \cap A \ \forall \ x \in X$.

Рис. 8. Подграф $G_A(A)$ графа G(X)

Компонентой связности неориентированного графа G(X) называется подграф $H_A(A)$ графа G(X) с множеством вершин $A \subset X$ и множеством ребер в G(X), инцидентных только вершинам из A, причем ни одна вершина $x_i \in A$ не смежна с вершинами из множества $X \setminus A$ (рис. 9).

Рис. 9. Граф с двумя компонентами связности

Деревом называется конечный связный неориентированный граф, состоящий, по крайней мере, из двух вершин и не содержащий циклов. Такой граф не имеет петель и кратных ребер.

Рис. 10. Дерево

Цикломатическое число. Пусть G(X) – неориентированный граф, имеющий n вершин, m ребер и k компонент связности. Цикломатическим числом графа G называется число $\mu(G) = m - n + k$.

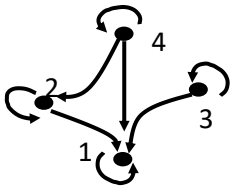
Это число имеет интересный физический смысл: оно равно наибольшему числу базисных (независимых) циклов в графе.

*Остовом T*графа G называется называется подграф графа в виде дерева, содержащий все его вершины. Остов определяет каркас графа.

*Кодеревом T^**остова T называется подграф графа G, содержащий все вершины и только те ребра, которые не входят в остов T. Ребра остова называют ветвями, а ребра кодерева - хордами.

Обход графа - это маршрут, содержащий все ребра или вершины графа и обладающий определенными свойствами. Наиболее известными обходами графа являются эйлеровы и гамильтоновы цепи и циклы.
*Теорема (Эйлера).*Конечный связный неориентированный мультиграф является эйлеровым графом тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют вершины нечетной степени.
*Гамильтоновой цепью*в неориентированном графе называется цепь, проходящая через каждую его вершину один и только один раз.
*Гамильтоновым циклом*в неориентированном графе называется цикл, проходящий через каждую вершину один и только один раз за исключением начальной вершины, которая совпадает с конечной.
*Гамильтоновым путем*в ориентированном графе называется путь $S = (x_1, ..., x_n)$, проходящий через все вершины графа, притом только по одному разу.
*Гамильтоновым контуром*называется контур $M=(x_0, x_1, ..., x_n, x_0)$ в ориентированном графе G(X), если он проходит через все вершины графа по одному разу.
Граф отношения $R \subset X \times X$ строится следующим образом. На плоскости в произвольном порядке изображаются точки - элементы множества X. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x, y) принадлежит отношению R.
Матрица отношения $R \subset X \times X$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствует некоторому элементу множества X. На пересечении строки x и столбца y ставится 1, если пара $(x, y) \in R$; все остальные элементы матрицы заполняются нулями. Элементы матрицы нумеруются двумя индексами, первый равен номеру строки, второй – номеру столбца.
Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Тогда матрица отношения
$R \subset X \times X$ имеет n строк и n столбцов, а ее элемент r_{ij} определяется по правилу:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } (x_i, y_j) \in R, \text{ где } i = 1, 2, ..., n;\ j = 1, 2, ..., n. \\ 0, \text{ если } (x_i, y_j) \notin R. \end{cases}$$

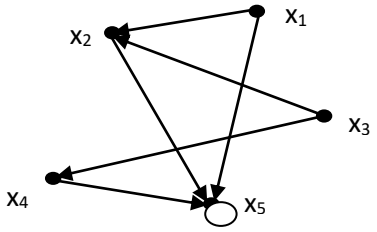


а

	1	2	3	4
1	1	0	0	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	1	0	1

б

Рис.11. Граф отношения Q (а) и матрица отношения Q (б)
Если в графе G(X) через a_{ij} обозначить число дуг, идущих из x_iв x_j, то матрица $A = \| a_{ij} \|$ (i = 1, ..., n; j=1, ..., n; где n – число вершин графа) называется *матрицей смежности вершин графа*. Наличие нулевого элемента на главной диагонали означает отсутствие петли в соответствующей вершине.
Рис. 12. Пример графа для определения матрицы смежности A



$A =$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	1
x_2	0	0	0	0	1
x_3	0	1	0	1	0
x_4	0	0	0	0	1
x_5	0	0	0	0	1

Для неориентированного графа матрица $R = \| r_{ij} \|$ размером n x m, где:

$r_{ij} =$ 1, если x_i (i = 1, ..., n) инцидентна g_j(j = 1, ..., m), 0, в противном случаеназывается *матрицей инциденций для ребер* графа.

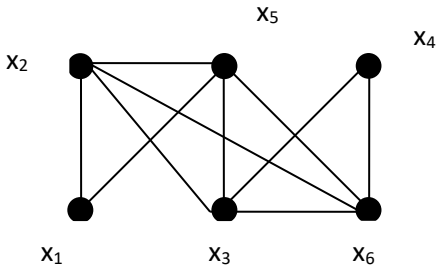
Функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающая логическое значение (1 или 0**)** изависящая от логических переменных, называется *логической функцией.*
Область определения логической функции – совокупность всевозможных n-мерных наборов из нулей и единиц, а для её задания достаточно указать, какие значения функции соответствуют каждому из наборов (табл.2.)

<u>Порядок проведения работы:</u>

1. Используя теоретические сведения, выполнить предложенное преподавателем задание.
2. Соответствующим образом оформить работу.

Перечень заданий.

Задан граф $G=(X, U)$



1) Записать матрицу смежности.

2) Пронумеровать ребра и построить матрицу инциденций.

$g_1 \rightarrow (x_1, x_2)$ $g_2 \rightarrow (x_2, x_3)$ $g_3 \rightarrow (x_3, x_4)$ $g_4 \rightarrow (x_1, x_5)$

$g_5 \rightarrow (x_4, x_6)$ $g_6 \rightarrow (x_3, x_6)$ $g_7 \rightarrow (x_2, x_5)$ $g_8 \rightarrow (x_3, x_5)$

$g_9 \rightarrow (x_2, x_6)$ $g_{10} \rightarrow (x_5, x_6)$

3)Найти степени всех вершин графа $m(x_i)$, $(x_i \cdot \in X)$ и вычислить сумму $\Sigma m(x_i)$.

4) Построить простую цепь максимальной длины, связывающую вершины x_1 и x_5.

5) Построить эйлеров цикл (начиная с x_1, все ребра проходить один раз и вернуться в x_1).

6) Удалив из графа ребро g_4, соединяющие вершины $\{x_1, x_3\}$, построить эйлерову цепь.

7) Привести пример гамильтонова цикла, начинающегося с вершины x_1 Найти цикломатическое число и привести пример дерева, являющегося составным подграфом.

Содержание отчета

Отчет должен содержать:

1.Название работы

2.Цель работы

3.Задание

4.Формулы расчета

5.Результат